Методичні особливості роботи з обдарованими учнями

Королюк А. П.

Ст. викладач кафедри природничо-математичної освіти РОІППО

Основною передумовою посилення уваги в Україні до проблеми обдарованих дітей є гуманізація суспільства, що викликала підвищену увагу до учнів, які виявляють неординарні здібності, появу мережі освітніх закладів, в яких одним з головних завдань є розвиток психічних якостей особистості та її творчих здібностей. Функціональні обов'язки педагогічних працівників різних категорій визначаються Конституцією та законами України, постановами Кабінету Міністрів України та наказами Міністерства освіти і науки України, органів управління освітою, іншими нормативними документами, а також локальними нормативними актами освітніх установ та органів влади.

На педагогічних працівників, які працюють з обдарованими школярами, покладаються обов'язки планування їх навчання та виховання за індивідуальними програмами розвитку; забезпечення умов для виявлення та розвитку обдарувань; використання ефективних форм і методів роботи, які забезпечують найбільш повну реалізацію творчих обдарувань школярів; вивчення індивідуальних особливостей школярів; піклування про розвиток здібностей, талантів на основі задатків та обдаровань; формування й підтримування позитивних мотивів до навчання; залучення обдарованих дітей до активної діяльності; навчання самооцінці та самовихованню.

Методична система навчання математично обдарованих дітей повинна, по-перше, будуватися на навчанні їх прийомам розумової діяльності при розв'язуванні задач, по-друге, використовувати певний набір задач, що дозволяє здійснити поставлені цілі. Таким чином, математичні задачі і способи їх розв'язання стають головною дидактичною метою в навчанні математики, оскільки завдяки їм учні пізнають нові математичні факти, засвоюють знання й опановують математичні прийоми і способи діяльності, розвивають особливе математичне мислення, осягають суть математичного методу пізнання дійсності.

З цією метою на уроках математики навчальну діяльність учнів необхідно організовувати відповідно до загального підходу до розв'язання математичних задач, що має п'ять основних етапи: осмислення умови задачі; пошук шляхів розв'язання задачі, складання плану розв'язання задачі; відтворення обраного плану розв'язання, тобто власне розв'язання задачі; робота над розв'язаною задачею, яка включає в себе перевірку правильності одержаного розв'язку та його відповідність поставленим вимогам.

В позаурочний час основну увагу слід приділити підготовці учнів до участі в турнірах юних математиків та олімпіадах.

Математичні олімпіади в Україні проводяться в декілька етапів: шкільні, районні (міські), обласні та всеукраїнські, в яких беруть участь переможці обласних олімпіад. Кращі юні математики Україини стають учасниками міжнародних олімпіад. Цей олімпіадний рух було започатковано на початку 60-х років XX ст. Математичні олімпіади є одним з ефективних засобів формування в учнів навичок самостійного творчого мислення. Олімпіада – це конкурс, у якому переможцями стають найсильніші, а інші учасники збагачуються новими знаннями і здобувають необхідний досвід. Тільки добровільний принцип і зацікавленість допомагають залучати учнів до осмисленої плідної роботи в період підготовки до олімпіад. При підготовці до шкільної олімпіади слід особливо ретельно підбирати завдання, доступні учням, виконання яких дає можливість відчути радість подолання труднощів.

Задачі, що пропонуються учасникам олімпіад (див. додаток), відрізняються від звичайних шкільних задач рівнем складності і нестандартністю. Як правило, розв’язання олімпіадної задачі ґрунтується на одній несподіваній ідеї. Чим оригінальніша ця ідея, тим краща задача з точки зору журі, яке складає завдання для олімпіади. Але абсолютно оригінальних задач з’являється небагато. Деякі прийоми і методи використовуються одразу в розв’язанні багатьох задач, звичайно, з певними змінами у різних ситуаціях. І не завжди легко здогадатися, який метод може допомогти в кожному конкретному випадку. Тому знайомство з найбільш поширеними методами бажане для кожного учасника олімпіади. В той же час у шкільному курсі математики учень не має змоги застосовувати принцип Діріхле, поняття інваріанта, розфарбовування та інші поширені олімпіадні ідеї. Розглянемо деякі спеціальні методи розв’язування олімпіадних задач.

Метод математичної індукції

При розв’язуванні олімпіадних задач інколи виникає потреба обґрунтувати, що певна властивість виконується для довільного натурального числа. Перевірити задану властивість для кожного натурального числа ми не можемо – їх кількість нескінченна. Доводиться міркувати так: 1) я можу перевірити, що ця властивість виконується при $n=1$; 2) я можу показати, що для кожного наступного значення n вона теж виконується, отже, властивість буде виконуватись для кожного наступного числа, починаючи з одиниці, тобто для всіх натуральних чисел.

Описаний метод міркувань - це так званий метод математичної індукції. Він є одним з універсальних методів доведення математичних тверджень. Доведення за допомогою цього методу завжди складається з двох етапів: 1) початок індукції: перевіряється, чи розглядуване твердження виконується при п=1; 2) індуктивний перехід: доводиться, що коли задане твердження виконується для п, то воно виконується і для п+1. Таким чином, почавши з п=1, ми на основі доведеного індуктивного переходу одержуємо справедливість сформульованого твердження для п=2, 3,..., тобто для будь-якого натурального п.

Принцип Діріхле.

Сам Діріхле, який багато використовував цей підхід, так формулював принцип: “Якщо в n шухлядах міститься не менше, ніж $n+1$ річ, то, висуваючи ці шухляди, ми принаймні в одній виявимо не менше двох речей”. Часто застосовують трохи більш загальне твердження: якщо множина з $nk+1$ елементів розбита на n підмножин, то принаймні одна підмножина містить не менше, ніж $k+1$ елемент.

Многочлени в олімпіадних задачах.

Многочленом n – того степеня ми називаємо функцію виду $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, де a_k – дійсні числа, x - змінна, $a_0=0$. Многочлени можна ділити один на один. Якщо ми кажемо, що при діленні $P(x)$ на $Q(x)$ ми отримали неповну частку $P_1(x)$ та остачу $R(x)$, це означає виконання для всіх x рівності $P(x)= P_1(x)\ Q(x)+ R(x)$, де степінь многочлена $R(x)$ менший, ніж степінь $Q(x)$. Якщо $R(x)$ тотожньо дорівнює нулю, то кажуть, що $P(x)$ ділиться на $Q(x)$. Якщо $P(x)$ ділимо на лінійний двочлен $ax + b$, то остачею може бути тільки число. Часто процес такого ділення записують, як і ділення чисел, у стовпчик.

Задачі про цілі числа.

Для будь-яких натуральних чисел a і $в$ в послідовності $a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ остачі від ділення цих чисел на $в$ будуть періодично повторюватись, починаючи з деякого місця. Адже за принципом Діріхле в нескінченній послідовності остач, які дають числа a^n при діленні на $в$, обов’язково знайдуться дві однакові остачі. А якщо $a^к$ та a^l дають однакові остачі, то однаковими будуть остачі чисел a^{k+1} та a^{l+1} , a^{k+2} та a^{l+2} тощо. І якщо ми знайдемо закон періодичності остач в послідовності $a, a^2, \ldots$, то легко зможемо вказати остачу для будь-якого числа a^n .

Доведення нерівностей.

Майже в кожному варіанті олімпіадних задач одним із завдань є доведення нерівностей. Довести – це означає показати, що ця нерівність виводиться з відомих або очевидних тверджень. При цьому часто використовуються різні допоміжні співвідношення. Мабуть, найбільш популярна в цій ролі нерівність $a^2+в^2 \geq 2ав$, де a і $в$ – довільні числа.

Інколи вимагається довести нерівність для трьох чисел $a, в, c,$ про які відомо, що вони є довжинами сторін деякого трикутника. Як правило, в розв’язанні цих задач немає нічого геометричного. Дана умова для *а, в, с* лише означає, що це додатні числа такі, що $a<в+c$, $в<a+c$, $c<a+в$. Із цих трьох нерівностей треба вивести запропоновану.

Функціональні рівняння.

Функціональні рівняння – це співвідношення із значеннями невідомої функції, за якими треба цю функцію знайти. Як правило, при розв'язанні функціональних рівнянь велике значення має вдала підстановка деяких конкретних значень невідомої або ціла послідовність таких підстановок.

Принцип крайнього.

У багатьох задачах розглядаються скінченні сукупності елементів – набори чисел, множини точок, групи людей, тощо. Тоді при розв'язуванні часто буває корисним розглянути елемент або кілька елементів з якоюсь властивістю максимальності або мінімальності – найбільше число, найближчі точки, людину з найбільшим числом знайомих. Такий підхід інколи називають принципом крайнього.

У таких задачах для нас важлива скінченність набору, які ми розглядаємо. Лише тому ми можемо одразу стверджувати, що максимальний або мінімальний в якомусь сенсі елемент існує. Але якщо такий "крайній" елемент обрати можна, то його часто розглядати зручніше, ніж деякий довільний. Адже чим більше інформації ми маємо про об'єкт, тим легше для нього щось довести, або з його допомогою прийти до суперечності. І вибір "крайнього" елемента може дуже допомогти саме тоді, коли невідомо, з чого треба починати розв'язування задачі.

Поняття інваріанта.

На олімпіадах часто пропонуються задачі про перетворення об'єкта з використанням деяких дозволених операцій. При розв'язуванні таких задач допоможе те, що ми зможемо знайти величину, яка не змінюється при дозволених операціях. Число або властивість, що не змінюється при дозволених перетвореннях, називається інваріантом. Інваріант може дати можливість знайти кінцевий результат наших операцій. Якщо числове значення інваріанту на двох об'єктах різне, то ми не можемо один об'єкт отримати з іншого.

Ідея розфарбування.

При розв'язуванні олімпіадних задач інколи клітинки, точки або інші фігури вважають розфарбованими в різні кольори в деякому порядку. Фактично це означає розбиття множини всіх даних фігур на підмножини. Розфарбування робить розв'язання більш наочним, та міркувати за таким малюнком легше, що дозволяє знаходити важливі для нас закономірності.

Ігри двох осіб.

В задачах про ігри звичайно треба відшукати виграшну стратегію для одного з учасників. У багатьох задачах для виграшної стратегії гравець має робити ходи, симетричні в певному сенсі ходам суперника. Ці ходи гарантують гравцеві, що йому буде куди зробити хід. А якщо гра завершується за скінченну кількість ходів, то колись не буде куди походити іншому учаснику.

Інколи до виграшу приводить стратегія такого типу – вся множина можливих ходів розбивається на пари, і, якщо один гравець вибирає елемент якоїсь пари, другий гравець тут же вибирає собі інший елемент цієї пари. Так другий гравець забезпечує собі можливість завжди зробити хід.

В іграх з числами або кількостями часто гравцю треба дотримуватися такої стратегії, щоб після кожного його ходу залишалось число або кількість з наперед обраною властивістю. Розв’язування задач на ігри буває дуже різноманітним.

Поняття напівінваріанта.

Коли треба довести, що якусь дію не можна проводити нескінченну кількість разів, часто підбирають функцію, що може приймати лише скінченну кількість значень і при кожному виконанні дії зростає або при кожному виконанні спадає. Тоді скінченність процесу стає очевидним. За аналогією з інваріантом – величиною, що не змінюється – цю функцію називають напівінваріантом.

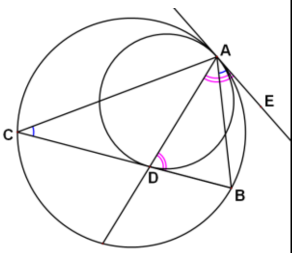
Комбінаторика в олімпіадних задачах.

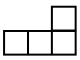
При розв’язуванні деяких задач буває необхідним підрахувати кількість різних комбінацій предметів, чисел або фігур. Часто лише після такого підрахування ми можемо застосувати принцип Діріхле. Галузь математики, що вивчає способи підрахування різних комбінацій, називається комбінаторикою. Одним із основних правил комбінаторики вважають правило добутку, яке формулюється так: якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу n_2 способами і так далі до $к$ – ї дії, яку можна виконати $n_к$ способами, то всі $к$ дій одну за другою можна виконати $n_1 * n_2 * \ldots * n_к$ способами. Олімпіадні задачі цікаві своєю оригінальністю. Часто буває, що задача про кількість якихось елементів розв’язується не з допомогою формул і тверджень комбінаторики, а деякими міркуваннями.

Додаток . **Завдання для олімпіади.**

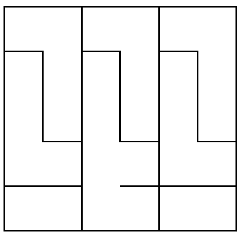
Завдання для олімпіади учням 7 класу	
Завдання	**Вказівка або розв'язання**
1. Знайдіть всі числа, які дорівнюють подвоєній сумі своїх цифр.	Серед більших, ніж двоцифрові, таких чисел немає. Серед одноцифрових чисел таких також немає. Отже розглянемо двоцифрові: $\overline{ab} = 2(a+b)$ ⇔10a+b=2a+2b⇔8a=b⇔ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \end{cases}$ Відповідь: 18.
2. Чи можливо розлити 50 л бензину по трьох баках так, щоб в першому баці було на 10 л більше, ніж у другому, а після переливання 26 л з першого бака в третій в третьому баці стало стільки ж бензину, скільки у другому?	Нехай у другому баці х літрів бензину, тоді в першому х+10, а в третьому 40-2х. Отже, можна скласти рівняння х=40-2х+26⇔х=22, але 40-2·22<0 що неможливо. Відповідь: неможливо.
3. Яку найбільшу кількість клітинок може перетинати пряма, що проведена на шаховій дошці 8×8?	Шахова дошка ділиться на квадрати сімома вертикальними та сімома горизонтальними лініями. Отже будь-яка пряма може мати не більше ніж 14 різних точок перетину цими лініями. Тому найбільша кількість квадратиків, яких може перетинати пряма не перевищує 15. Неважко показати, що 15 квадратиків можливо перетнути.
4. Послідовність чисел починається з 7. Далі кожне наступне число це сума цифр квадрата попереднього числа збільшеного на 1. Знайти число, яке буде написане на 2008-му місці.	Розглянемо декілька перших членів даної послідовності 7, 5, 8, 11, 5, 8,11, …, очевидною є повторюваність її членів через кожні три члени. А оскільки 2008=2007+1, а 2007 кратне 3, то на 2007-му місці стоїть число 8, а на 2008 – 11.
5. Вчитель намалював на дошці шестикутник, сторони якого дорівнюють 1, 2, 3, 4, 5 та 6 см відповідно (не обов'язково саме у такому порядку). Чи могло трапитися так, що всі кути такого шестикутника виявилися рівними між собою? Відповідь обґрунтуйте.	Могло. Розглянемо рівносторонній трикутник зі стороною 9 см і відріжемо у ньому від однієї вершини рівносторонній трикутник зі стороною 1 см, від другої вершини – рівносторонній трикутник зі стороною 2 см, а від третьої вершини – рівносторонній трикутник зі стороною 3 см. Отримали шуканий шестикутник з рівними кутами.

Завдання для олімпіади учням 8 класу	
Завдання	**Вказівки або розв'язання**
1. Довести, що $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}<\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}=$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}<$.
2. В парламенті деякої країни дві палати, які мають рівне число депутатів. При голосуванні у важливому питанні взяли участь всі депутати, причому таких що утрималися не було. Коли голова повідомив, що рішення прийнято з перевагою в 23 голоси, лідер опозиції заявив, що результати голосування сфальсифіковані. Як він це зрозумів?	Загальна кількість депутатів в обох палатах парна. Оскільки в голосуванні взяли участь всі депутати і не було таких, що утрималися, тому сума голосів "за" і "проти" повинна дорівнювати загальній кількості депутатів. Тому вона – парна. В такому разі, і різниця голосів "за" і "проти" також парна. Але число 23 непарне. Протиріччя.

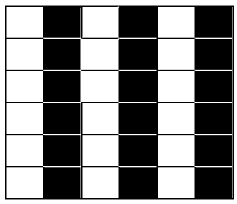
3. Дано два кола, що дотикаються внутрішнім чином в точці А. В більшому колі проведено хорду ВС, що дотикається до меншого кола в точці D. Довести, що AD – бісектриса кута ∠ВАС. 	Проведемо в точці А дотичну АЕ. Тоді ∠BDA=∠DAE. Оскільки ∠BAE=∠BCA, тоді ∠CAD=∠DAB. Що і потрібно було довести.
4. Знайдіть усі трійки дійсних чисел x, y, z, які задовольняють рівняння $2(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2})=x+y+z$.	Введемо таке позначення $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y-1}=b$, $\sqrt{z-2}=c$. Тоді задане рівняння можна переписати у вигляді $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$, звідси $a=1,\ b=1,\ c=1$, отже, $x=1,\ y=2,\ z=3$.
5. Чи можна закласти фігурками виду (**див. малюнок №1**) шахову дошку а) 4х6; б) 5х6; в) 6х6?	а) можна (**див. малюнок №** 2); б) не можна, бо 5•6 не ділиться на 4; в) розфарбуємо дошку, як показано на малюнку № 3. Як би не клали на дошку 6•6 задану фігурку, вона накриватиме непарну кількість чорних клітинок. Щоб закласти всю дошку потрібно 9 фігурок. Вони накриватимуть непарну кількість чорних клітинок, а всіх клітинок парна кількість. Отже, прийшли до суперечності
6. Жорстокий цар Шагріяр зажадав від чарівної Шахразади, щоб вона протягом наступних 1001-єї ночей називала йому по одному розв'язкові в натуральних числах рівняння $x^2-y^2=p^{2008}$, де p – деяке просте число. Скориставшись килимом-літаком, Шахразада прилетіла до Рівного і просить вашої допомоги. Не забувайте тільки, що самого числа p вона поки що не знає.	Запишемо рівняння у вигляді $(x-y)(x+y)=p^{2008}$ і покладемо $x-y=p^k$, $x+y=p^{2008-k}$, де $k=1,2,...,1001$. Тоді $x=\dfrac{p^{2008-k}+p^k}{2}$, $y=\dfrac{p^{2008-k}-p^k}{2}$ - шукані розв'язки у натуральних числах.
7. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел $a=2^{2008}-1$ та $b=2^{2007}+1$.	Спільний дільник даних чисел буде також дільником числа $a-2b=3$. Аналізуючи остачі від ділення степенів двійки на 3 (2 в парному степені дає остачу 1, а в непарному – остачу 2), переконуємося, що кожне із заданих чисел на 3 ділиться.



Малюнок № 1.



Малюнок № 2.

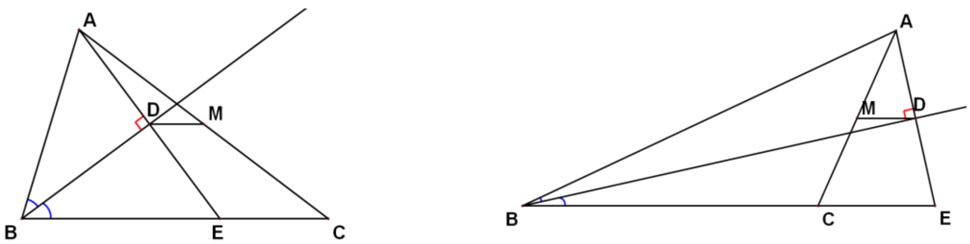


Малюнок № 3.

Завдання для олімпіади учням 9 класу	
Завдання	**Вказівки або розв'язання**
1. Знайти всі чотирьохцифрові числа, які в 59 разів більші від числа утвореного з першої та останньої його цифр збільшеного на 8.	За умовою $\overline{abcd}=59\cdot\left(\overline{ad}+8\right)\Leftrightarrow$ $1000a+10\cdot\overline{bc}+d=590a+59d+472\Leftrightarrow$ $10\cdot\overline{bc}+410a=472+58d\Rightarrow$ d=1 або d=6. Якщо d=1, то $\overline{bc}=-41a+53\Rightarrow$ a=1, $\overline{bc}=12\Rightarrow\overline{abcd}=1121$. Якщо d=2, то $\overline{bc}=-41a+82\Rightarrow$ 1) a=1, $\overline{bc}=41\Rightarrow\overline{abcd}=1416$. 2) a=2, $\overline{bc}=0\Rightarrow\overline{abcd}=2006$. Відповідь: 2006, 1416, 1121.

2. Аферист намалював багато купюр у 3 грн та 7 грн. Починаючи з якого числа він зможе дати без здачі будь-яку суму?	12=3+3+3+3; 13=7+3+3; 14=7+7. Всі решта отримуються додаванням купюр номіналом 3 грн. 11 отримати неможливо. Відповідь: Починаючи з 12.
3. Курс акцій компанії кожний день в 12.00 підвищується чи знижується на *n* процентів, де *n* - фіксоване ціле додатне число, менше 100 (курс не округляється). Чи існує *n*, для якого курс акцій може двічі прийняти одне й те ж значення?	Зрозуміло, що курс акцій при підвищенні множиться на $1+\frac{n}{100}$, а при пониженні на - $1-\frac{n}{100}$. Отже, після k підвищень і l понижень курс акцій помножиться на $\left(1+\frac{n}{100}\right)^k\left(1-\frac{n}{100}\right)^l$. Доведемо, що це число не може дорывнювати 1. Для цього число $\frac{n}{100}$<1 запишемо у вигляді нескоротного дробу $\frac{p}{q}$, де q>1. Тоді $1+\frac{n}{100}=\frac{q+p}{q}$ та $1-\frac{n}{100}=\frac{q-p}{q}$. Оскільки числа q+p та q-p взаємно прості з q, то дріб $\frac{(q+p)^k(q-p)^l}{q^{k+l}}$ також нескоротний, а тому не дорівнюэ 1. Відповідь: не існує.
4. В трикутнику АВС (**див. малюнок № 4**) проведено бісектрису кута $\angle ABC$. З точки А на неї опущений перпендикуляр AD, M – середина AC. Знайти MD, якщо відомі сторони трикутника АВС.	Продовжимо AD до перетину з ВС в точці Е. Тоді трикутник АВЕ рівнобедрений. Отже AD=DE, тоді DM – середня лінія трикутника ЕАС. Оскільки EC=$\lvert BC-AB\rvert$, тоді $DM=\frac{EC}{2}=\frac{\lvert BC-AB\rvert}{2}$.
5. Про дійсні числа x і y відомо, що $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=2008$. Знайдіть значення виразу $\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}+\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$.	Відповідь: $\frac{(k^2+4)^2+16k^2}{4k(k^2+4)}$, де $k=2008$. Нехай $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=k$, тоді $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{k}{2}$. Далі за цією самою властивістю маємо $\frac{k}{2}+\frac{2}{k}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{2(x^4+y^4)}{x^4-y^4}$. Звідси випливає, що $\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}=\frac{k^2+4}{4k}$. Після цього відповідь знаходиться просто.
6. Знайдіть всі значення параметра *a*, при яких система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=6x-8, \\ x^2+y^2=a^2+8y-16 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.	Перепишемо задану систему рівнянь у вигляді: $\begin{cases} (x-3)^2+y^2=1, \\ x^2+(y-4)^2=a^2. \end{cases}$ Отримали систему із рівнянь двох кіл, відстань між центрами яких дорівнює 5. Ця система матиме єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли такі кола дотикатимуться одне до одного, тобто коли сума або різниця їх радіусів дорівнюватиме 5. Звідси знаходимо $a=\pm4$ або $a=\pm6$.
7. Деякі сторони клітинок шахівниці (8×8) пофарбовано у червоний колір, а інші – у синій колір. Дозволяється обирати деяку клітинку дошки і перефарбовувати всі її сторони одночасно у протилежний колір. Чи завжди можна зробити	Не завжди. Зауважимо, що всього можна зафарбувати 144 одиничних відрізки – сторони клітинок. Тоді зафарбуємо по 9 горизонтальних сторін клітинок першого, третього, п'ятого та сьомого стовпців шахівниці у синій колір. При цьому отримаємо 72

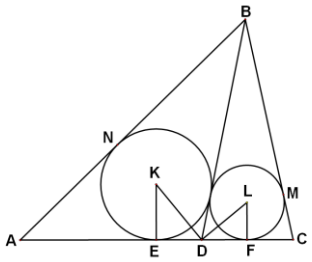
декілька перефарбувань таким чином, щоб синіми стали менше ніж $\frac{1}{4}$ від усієї кількості сторін клітинок?	вершини клітинок, з яких виходить непарна кількість синіх відрізків. Зрозуміло, що при всіх перефарбовуваннях вона залишатиметься непарною, а отже, кількість вершин, з яких виходять сині відрізки, зменшитися не може. Оскільки кожен такий відрізок сполучає лише дві вершини, то кількість синіх відрізків не менша за 72:2=36=144:4.



Малюнок № 4.

Завдання для олімпіади учням 10 класу	
Завдання	**Вказівки або розв'язання**
1. Розв'яжіть нерівність $\frac{\sin 3x + 2\sin 2x}{\sin x} + 2 \ge 0$.	Відмітимо, що $x \ne \pi n$, $n \in Z$. Використовуючи формули подвійного та потрійного кутів отримаємо $(2\cos x + 1)^2 \ge 0$, що виконується при всіх допустимих значеннях x. Відповідь: $x \ne \pi n$, $n \in Z$.
2. Розв'язати рівняння $\left(x^2-5\right)^2 = x+5$.	$\left(x^2-5\right)^2 = x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5=y \\ y^2-5=x \end{cases} \Rightarrow x^2-y^2=y-x \Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} y-x=0 \\ y+x+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-5=0 \\ x^2+x-4=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2} \\ x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$.
3. У трикутнику *ABC* (**див. малюнок № 5**), точка *D* знаходиться на стороні *AC*. В трикутники *ABD* і *CBD* вписали кола радіусів r_1 і r_2 відповідно, які дотикаються до сторони *AC* в точках *E* та *F* відповідно. Довести, що $r_1 \cdot r_2 = DE \cdot DF$, а у випадку, коли D є точкою дотику вписаного кола у трикутник ABC має місце рівність DE=DF.	Нехай K і L центри кіл вписаних у трикутники *ABD* і *CBD* відповідно. Трикутники EDK та FLD подібні. Звідки слідує $r_1 \cdot r_2 = DE \cdot DF$. У випадку, коли D є точкою дотику вписаного кола у трикутник ABC. ED-DF $= \frac{AD+BD-AB}{2} - \frac{CD+BD-BC}{2}$ $= \frac{(AD-CD)+(BC-AB)}{2} =$ $= \frac{\left(\frac{AB+AC-BC}{2} - \frac{AC+BC-AB}{2}\right) + \left(BC-AB\right)}{2} = 0$.
4. Довести, що існує нескінчена кількість функцій f: $R \to R$ для яких $f(x+1)-f(x)=2x$?	Відповідь: $f(x)=x^2-x+a$, де a довільне дійсне число.
5. Послідовність натуральних чисел $\{a_n\}$ задана рекурентною формулою $a_{n+1}=(a_n+n)^2+a_n-2$. Довести, що число a_{a_1} ділиться на число a_1+1, якщо $a_1>1$.	Вказівка: Нехай $b_n=a_n+n$ тоді $b_{n+1}=(b_n)^2+b_n-1 \Rightarrow b_{n+1}+1=b_n(b_n+1)=b_n b_{n-1}(b_{n-1}+1)=\dots$ $= b_n b_{n-1}\dots b_1(b_1+1) \Rightarrow$ для довільного n>1 виконується, що b_n+1 ділиться на b_1, але $b_1=a_1+1$ тоді $a_{a_1}=b_{a_1}+1-\left(a_1+1\right)$ що ділиться на a_1+1.
6. Знайдіть всі трійки дійсних чисел x, y, z, які задовольняють рівності: $x=\sqrt{\left\lvert\frac{1-y}{1+y}\right\rvert}$, $y=\sqrt{\frac{z+1}{2}}$, $z=\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$.	Із заданих рівнянь послідовно знаходимо: $x \ge 0$, $0 < z \le 1$, $0 \le y \le 1$, $x^2=\left\lvert\frac{1-y}{1+y}\right\rvert=\frac{1-y}{1+y}$, $y^2=\frac{z+1}{2}$, $z^2=\frac{1}{1+\frac{1-y}{1+y}}=\frac{1+y}{2}$. Отже,

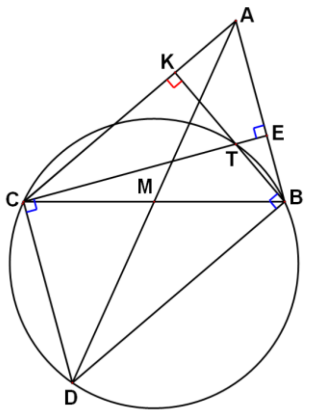
	$y^2 - z^2 = \frac{z-y}{2}$, тобто $(y-z)(y+z+1)=0.$ Звідси маємо $y=z.$ Тоді $y^2 = \frac{y+1}{2}$, $y_1 = -\frac{1}{2}$ (не задовольняє), $y_2 = 1.$ Остаточно отримуємо $y=z=1,\ x=0.$
7. Кожне натуральне число пофарбоване в один з двох кольорів – синій або жовтий, причому чисел кожного з кольорів безліч. Відомо до того ж, що сума будь-яких 2007 попарно різних чисел синього кольору є числом синього кольору, а сума будь-яких 2007 попарно різних чисел жовтого кольору є числом жовтого кольору. Визначте, якого кольору буде число 2008, якщо число 1 пофарбоване синім кольором. Відповідь обґрунтуйте.	Доведемо, що всі непарні числа одного кольору, а всі парні – іншого. Припустимо, що є, наприклад, два числа *n* та *n + 2* різних кольорів. Не зменшуючи загальності можна вважати, що *n* – синього, а *n + 2* – жовтого кольору. Позначимо $n = s_1, n+2 = g_1.$ Оскільки чисел кожного з кольорів є безліч, то знайдеться пара сусідніх чисел $g_2 > g_1$ та $s_2 = g_2 + 1$ відповідно жовтого та синього кольорів, і аналогічна пара $g_3 > g_2$ та $s_3 = g_3 + 1.$ Зауважимо, що $s_1 + s_2 + s_3 = g_1 + g_2 + g_3.$ Наступні 2000 пар, кожна з яких знаходиться строго правіше від попередньої, утворимо за таким принципом: $g_4 = s_4 + 1,\ s_5 = g_5 + 1,\ g_6 = s_6 + 1,$ $s_7 = g_7 + 1, \ldots,\ g_{2002} = s_{2002} + 1,\ \ldots,\ s_{2007} = g_{2007} + 1,$ де s_i - синього, а g_i - жовтого кольору. Позначимо тепер їх спільну суму $s_1 + s_2 + \ldots + s_{2007} = g_1 + g_2 + \ldots + g_{2007} = M.$ Тоді, згідно з умовою задачі, число *M* повинно бути зафарбоване як у синій, так і у жовтий кольори, що, зрозуміло, одночасно не можливо. Отримане протиріччя доводить, що кольори всіх чисел однієї парності співпадають. Оскільки число 1 – синього кольору, то 2008 – жовтого кольору.

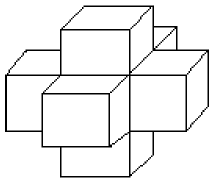


Малюнок № 5.

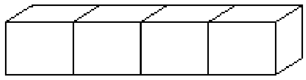
Завдання для олімпіади учням 11 класу	
Завдання	**Вказівки або розв'язання**
1. Довести, що корені рівняння $x + \frac{1}{x} = 2\cos 40^\circ$ є також коренями рівняння $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2\cos 160^\circ$.	Піднесемо рівняння $x + \frac{1}{x} = 2\cos 40^\circ$ до квадрату, тоді $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2\cos 80^\circ$. Ще раз підносячи це рівняння до квадрату отримаємо $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2\cos 160^\circ$, що і потрібно було довести.
2. Числа a і b такі, що перше рівняння системи	За умовою задачі функція $y = \cos x - ax - b$

$\begin{cases}\cos x = ax + b, \\ \sin x + a = 0\end{cases}$ має точно два розв'язки. Доведіть, що система має хоча б один розв'язок.	перетворюється в нуль тільки в двох точках x_1, x_2(можна вважати $x_1<x_2$). Ці точки розбивають числову вісь на три проміжки, причому функція на крайніх проміжках набуває різних знаків. Отже, на середньому проміжку функція набуває такого ж знаку як на одному з крайніх. Саме та точка x_1 чи x_2, в якій функція не змінює знак і буде точкою екстремуму. Тоді похідна функції $y = \cos x - ax - b$ в цій точці дорівнює нулю. Це означає, що знайдена точка є коренем другого рівняння. Що і треба було довести.
3. В гострокутному ΔABC (**див. малюнок № 6**) медіану AM продовжили так, що MD=AM. Навколо ΔBCD описали коло, яке перетинає висоту BK трикутника ABC в точці T. Знайти кут між прямими AB і CT.	Відмітимо, що ABDC – паралелограм, а отже кут ∠KBD=90°, тобто DT – діаметр цього кола. Тоді кут ∠TCD=90°. Оскільки CD|| AB то шуканий кут дорівнює 90°.
4. Знайдіть всі дійсні x для, яких виконується рівність: $(2+\sqrt{3})^x + 1 = (2\sqrt{2+\sqrt{3}})^x$.	Запишемо вихідне рівняння у рівносильному вигляді: $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1$. Число $x = 2$ є коренем такого рівняння, оскільки кожен доданок у лівій частині рівняння є строго спадною показниковою функцією.
5. Перший, десятий та тридцятий члени геометричної прогресії є натуральними числами. Чи вірно, що і двадцятий її член є натуральним числом?	Вірно. Нехай a_1, a_2, ..., a_n, ... - задана геометрична прогресія, q – її знаменник. За умовою a_1, $a_{10}=a_1q^9$ та $a_{30}=a_1q^{29}$ – натуральні числа. Тому q^9 и q^{29} – додатні раціональні числа. Звідси випливає, що $q^2 = \frac{q^{29}}{\left(q^9\right)^3}$ та $q = \frac{q^9}{\left(q^2\right)^4}$ – додатні раціональні числа. Нехай $q = \frac{m}{n}$, де m та n – натуральні взаємно прості числа. Оскільки число $a_{30} = \frac{a_1 m^{29}}{n^{29}}$ натуральне, m^{29} і n^{29} взаємно прості, то a_1 ділиться на n^{29}. Звідси отримуємо, що $a_{20} = \frac{a_1 m^{19}}{n^{19}}$ – натуральне число.
6. Знайдіть всі функції $f: R \to R$ такі, що для будь-яких дійсних x, y: $f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x$.	$f(x) = a\sin x, \quad a \in R$. $f(x) = f\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) = f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} + f(\frac{\pi}{2})\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = f(\frac{\pi}{2})\sin x$. Тому $f(x) = a\sin x$, $a \in R$. З іншого боку, така функція для всіх $a \in R$ задовольняє наше рівняння.
7. Дитячий конструктор складається з фігурок виду (див. малюнок № 7) (ліва фігурка утворена з семи кубиків розмірами $1\times1\times1$, а права – з чотирьох таких кубиків). Чи можна за допомогою цих фігурок скласти куб розмірами $11\times11\times11$, що не матиме порожнин?	Не можна. Пофарбуємо одиничні кубики куба розмірами $11\times11\times11$ у чорний та білий кольори у шаховому порядку (одиничні кубики із спільною гранню повинні мати різний колір). Тоді різниця чорних та білих кубиків, зайнятих будь-якою з двох даних фігур буде ділитись на 5. У той же час в усьому кубі розмірами $11\times11\times11$ ця різниця дорівнює 1 або -1.





Малюнок № 6.



Малюнок № 7.