Моквинський навчально-виховний комплекс
«гімназія – загальноосвітня школа I ступеня»

Розв'язування текстових задач

Виконав
Галайчук Марія Григорівна,
вчитель математики

Моквин

Галайчук М.Г. Розв’язання текстових задач. Навчально-методичний посібник. – Березне, 2012. – 65 с.

У посібнику розкрито етапи розв’язування текстових задач та розв’язування задач різних типів. Матеріали посібника стануть в нагоді як вчителю – молодому спеціалісту, так і досвідченому майстру освітянської ниви.

Рецензенти:
Сенюк Ольга Борисівна, вчитель математики Моквинського НВК, Старший вчитель
Бережна Ангеліна Миколаївна, заступник директора Моквинського НВК

Зміст

Вступ

У чинній програмі з математики для загальноосвітніх шкіл України приділяється належна увага формуванню вмінь школярів розв'язувати текстові задачі.

Розв'язування таких задач складається з етапів:

1) Аналіз умови і того, що потрібно знайти.

Цей етап передбачає прогнозування отриманого результату, чітке усвідомлення, що у відповіді потрібно отримати: яку величину, які одиниці вимірювання тощо.

2)Вибір невідомих.

Успішне розв'язування задачі залежить від вдалого вибору невідомих. Як правило, доцільно вводити невідомі, що позначають шукану величну, тобто позначати через невідоме (або невідомі) те, про що запитується в задачі. Також встановлюються межі значень введених невідомих.

3) Складання рівнянь або системи рівнянь.

На цьому етапі в учнів максимально розвивається логічне мислення, формуються навички практичного застосування знань про взаємозв'язки між величинами, подіями, процесами, про які йдеться в задачі. Іншими словами, створюється математична модель задачі.

4)Розв'язування одержаного рівняння або системи рівнянь.

Під час розв'язування складеного рівняння або системи рівнянь школярі застосовують здобуті знання. Важливо не забувати про визначення області допустимих значень і одержані результати зіставити з множиною можливих значень введених невідомих і оцінки їх під час другого етапу. Якщо одержані розв'язки не задовольняють умову задачі, то їх слід відкинути.

5) Перевірка одержаних результатів і запис відповіді.

Перевірка одержаних результатів полягає у зіставленні з прогнозом, передбаченим на першому етапі. Це так звана «груба математична прикидка». Далі слід перевірити, чи виконуються всі умови, передбачені текстом задачі. У більшості випадків перевірку можна виконувати усно. Записувати відповідь слів у порядку, у якому поставлено запитання задачі.

Р О З Д І Л І
ЗАДАЧІ НА СПІЛЬНУ РОБОТУ

1. Два екскаватори вирили котлован за 24 дні. Перший екскаватор міг би виконати цю роботу в 1,5 раза швидше, ніж другий. За скільки днів перший екскаватор міг би виконати цю роботу?

Розв'язання

Приймемо всю виконану роботу за 1, а через *x, y* позначимо кількість днів, за які могли б виконати роботу, працюючи окремо, перший і другий екскаватори відповідно.

Тоді $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ продуктивність праці першого і другого екскаваторів відповідно. Виходячи з умови задачі, складаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}, \\ 1.5x = y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x, \\ \frac{1}{x}+\frac{2x}{3}=\frac{1}{24}; \end{cases}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}=\frac{1}{24},$$

24+16-x=0,

x=40,

x≠0, y≠0

Відповідь. За 40 днів.

2. Два робітники за зміну виготовили 72 деталі. Після того як перший робітник підвищив продуктивність праці на 15 %, а другий на 25 %, разом за зміну вони почали виготовляти 86 деталей. Скільки деталей виготовляє кожен робітник за зміну після підвищення продуктивності праці?

Розв'язання

Нехай x деталей виготовляв за зміну перший робітник, а y деталей — другий. Тоді:

$$x+y = 72.$$

Після підвищення продуктивності праці перший робітник почав виготовляти 1,15x деталей за зміну, а другий — \,25y деталей. Тоді:

$1{,}15x+1{,}25y= 86.$

Маємо систему:

$$\begin{cases} x+y=72, \\ 1{,}15x+1.25y=86, \end{cases}$$

де $x > 0$ і $y > 0$.

Розв'яжемо систему.

$$\begin{cases} x=72-y, \\ 1{,}15(72-y)+1{,}25y=86; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=72-y, \\ 0{,}1y=3{,}2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=32, \\ x=40. \end{cases}$$

40 • 1,15 = 46 (деталей) — виготовляє перший робітник за зміну після підвищення продуктивності праці.

$32 \bullet 1{,}25 = 40$ (деталей) — виготовляє другий робітник за зміну після підвищення продуктивності праці.

Відповідь. 46 деталей, 40 деталей.

3. Дві бригади, працюючи разом, закінчили ремонт ділянки шляху за 6 днів. Першій бригаді для виконання 40 % усієї роботи потрібно було б на 2 дні більше, ніж другій бригаді для виконання $13\frac{1}{3}$% усієї роботи. За скільки днів могла б відремонтувати кожна з бригад окремо всю ділянку шляху?

Розв'язання

Позначимо через x кількість днів, за які відремонтує всю ділянку шляху перша бригада, а через y — друга бригада.

Весь обсяг роботи приймемо за 1. Тоді перша бригада за один день виконає $\frac{1}{x}$ частину роботи, друга – $\frac{1}{y}$, разом $\frac{1}{6}$ частину роботи. Отже,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}.$$

Для виконання 40 % роботи першій бригаді потрібно $\frac{40}{100}x=\frac{2}{5}x$ (днів).

Друга бригада $13\frac{1}{3}$%$=\frac{40}{3}$% роботи виконає за $\frac{40}{3\bullet 100}y=\frac{2}{15y}$(днів). За умовою:

$$\frac{2}{5}x-\frac{2}{15}y=2.$$

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6},\\ \frac{2}{5}x-\frac{2}{15}y=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}6y+6x=xy,\\ 6x-2y=30;\end{cases}$$

$$\begin{cases}8y+xy=-30,\\ 6x-2y=30;\end{cases}$$

$$\begin{cases} y(8-x) = -30, \\ 6x - 2y = 30; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{30}{8-x}, \\ 6x + \dfrac{60}{8-x} = 30. \end{cases}$$

Випишемо друге рівняння системи і розв'яжемо його:

$$6x + \frac{60}{8-x} - 30 = 0,$$

$$\begin{cases} 6x(8-x) + 60 - 30(8-x) = 0, \\ 8 - x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 48x - 6x^2 + 60 - 240 + 30x = 0, \\ x \neq 8; \end{cases}$$

$-6x^2+78x-180=0$,

$x^2-13x+30=0$.

$D=169-120=49$,

$x_1=3$, $x_2=10$.

Тоді $y_1 = -\dfrac{30}{8-3} = -6$ — не задовольняє умову задачі,

$$y_2 = -\frac{30}{8-10} = \frac{30}{2} = 15.$$

Відповідь. Кожна з бригад окремо могла б відремонтувати всю ділянку шляху за 10 і 15 днів.

4. Басейн заповнюється двома трубами за 6 год. Перша труба заповнює його на 5 год швидше, ніж друга. За який час кожна труба, діючи окремо, може заповнити басейн?

Розв'язання

Нехай перша труба заповнює басейн за x год, а друга — за y год. За умовою $x+5=y$.

Позначимо всю роботу (місткість басейну) через 1. Тоді перша труба за 1 год заповнить $\frac{1}{x}$ частину басейну, а друга – $\frac{1}{y}$.

Маємо рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}.$$

Складаємо систему:

$$\begin{cases} y=x+5, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \end{cases}$$

де x>0, y>0.

$$\begin{cases} y=x+5, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{6}=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6(x+5)+6x-x(x+5)=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq -5; \end{cases}$$

$6x + 30 + 6x - x^2-5x = 0$,

$x^2 - 7x - 30 = 0$,

$x_1 = -3$ — не задовольняє умову задачі, x_2 =10, тоді y_2=15.

Відповідь. Перша труба може заповнити басейн за 10 год, друга труба — за 15 год.

5. Один робітник може виконати певну роботу на 4 год швидше, ніж другий. Якщо вони працюватимуть разом протягом 2 год, то після цього незавершену роботу перший робітник виконає за 1 год. За який час може виконати всю роботу другий робітник, працюючи сам?

Розв'язання

Нехай другий робітник, працюючи сам, може виконати всю роботу за х год, тоді перший — за (x-4) години.

Якщо прийняти всю роботу за одиницю, то $\frac{1}{x}$ — та $\frac{1}{x-4}$ — продуктивність праці другого і першого робітників відповідно.

$3 \bullet \frac{1}{x-4} = \frac{3}{x-4}$ — робота, виконана першим робітником за 3 год.

$2 \bullet \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$ — робота, виконана другим робітником за 2 год.

Складаємо рівняння:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x-4} = 1,$$

де $x>0$.

$$\begin{cases} 2(x-4) + 3x - x(x-4) = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4; \end{cases}$$

$2x - 8 + 3x - x^2 + 4x = 0,$

$x^2 - 9x + 8 = 0.$

$D = 81 - 32 = 49,$

$$x_1 = \frac{9-7}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{9+7}{2} = 8.$$

Значення x не задовольняє умову задачі. Отже, другий робітник може виконати всю роботу за 8 год.

Відповідь. 8 год.

6. Дві бригади, працюючи одночасно, обробили ділянку землі за 12 год. За який час обробить цю ділянку кожна бригада окремо, якщо продуктивності праці бригад відносяться як 3:2?

Розв'язання

Нехай x, y — продуктивності праці за 1 год першої і другої бригад відповідно, а вся виконана ними робота становить 1. Тоді, виходячи з умови задачі, складаємо систему:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{12}, \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

де $x>0$, $y>0$. З

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}x, \\ \dfrac{3}{2}x+y-\dfrac{1}{12}=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y, \\ 30y=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{30}, \\ x=\dfrac{1}{20}. \end{cases}$$

Отже, $\dfrac{1}{20}$, $\dfrac{1}{30}$ — продуктивності праці першої і другої бригад за 1 год. Це означає, що бригади можуть виконати роботу, працюючи окремо, перша за 20 год, друга — за 30 год.

Відповідь. За 20 год, за 30 год.

7. Два робітники, один із яких почав працювати на півтора дні раніше другого, працюючи незалежно один від одного, виконали роботу за 7 днів, починаючи з моменту виходу на роботу першого робітника. Якби всю роботу доручили виконувати одному робітнику, то перший витратив би на це на 3 дні більше, ніж другий. За скільки днів кожний робітник окремо виконав би всю роботу?

Розв'язання

Нехай перший робітник, працюючи сам, виконав би всю роботу за x днів, а другий— за (x-3) дні. Приймемо всю виконану роботу за 1, тоді $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x-3}$ — продуктивність праці першого і другого робітників відповідно за 1 день.

За умовою задачі вся робота була виконана за 7 днів, але перший робітник працював усі 7 днів, а другий — 5,5 дня. Отже, $\frac{7}{x}$ частина роботи, яку виконав перший робітник, а $\frac{5,5}{x-3}$ частина роботи, яку виконав другий робітник.

Складаємо рівняння:

$\frac{7}{x}+\frac{5,5}{x-3}=1$, де $x>3$,

$$\begin{cases} 7(x-3)+5,5x-x(x-3)=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq 3. \end{cases}$$

$7x-21+5,5x-x^2+3x=0$,

$x^2-15,5x+21=0$.

$D = 240,25 - 84 = 156,25$,

$x_1=\frac{15,5+12,5}{2}=\frac{3}{2}$ — не задовольняє умову, що $x>3$,

$x_2=\frac{15,5+12,5}{2}=14.$

Відповідь. Перший робітник може виконати всю роботу, працюючи сам, за 14 днів, другий — за 11 днів.

8. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати певну роботу за 12 днів. Якщо перший робітник виконає половину роботи, а потім другий — ще половину, то всю роботу буде закінчено за 25 днів. На скільки днів раніше один від одного робітники можуть виконати всю роботу, працюючи окремо?

Розв'язання

Нехай перший робітник, працюючи сам, може виконати всю роботу за x днів, а другий — за y днів. Якщо вся виконана робота становить 1,то $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ продуктивність праці за 1 день першого і другого робітників відповідно, а $\frac{1}{12}$ їх спільна продуктивність. За умовою задачі робітники виконали по половині роботи кожен зі своєю продуктивністю і на це витратили разом 25 днів, тому:

$0{,}5 \div \frac{1}{x} = 0{,}5x$ — дні, за які виконав перший робітник половину роботи. Аналогічно другий — за 0,5y днів.

Складаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 0{,}5x + 0{,}5y = 25, \end{cases}$$

де x>0, y>0.

$$\begin{cases} x + y = 50, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{12} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 50 - y, \\ \frac{1}{50 - y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{12} = 0. \end{cases}$$

Випишемо друге рівняння системи і розв'яжемо його:

$$\frac{1}{50 - y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{12} = 0,$$

$$\begin{cases} 12y + 12(50 - y) - y(50 - y) = 0, \\ y \neq 0, \\ y \neq 50. \end{cases}$$

$12y+600-12y-5y+y^2=0$,

$y^2-50y+600 = 0$.

За теоремою Вієта:

$$\begin{cases} y_1 \cdot y_2 = 600, \\ y_1 + y_2 = 50; \end{cases}$$

$y_1=30$, $y_2=20$.

Тоді x_1 =20, x_2 =30.

(30; 20) і (20; 30) — розв'язки системи.

Отже, працюючи окремо, робітники можуть виконати всю роботу на 10 днів раніше один від одного.

Відповідь. На 10 днів.

9. Перший насос заповнює бак на 6 год швидше, ніж другий. Обидва насоси заповнюють бак разом за 4 год. За скільки годин заповнить бак перший насос?

Розв'язання

Нехай x год — час, за який заповнює бак перший насос, тоді (x+6) год — час, за якийзаповнює бак другий насос.

За умовою задачі складаємо рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4},$$

у якому x>0.

$4(x+6)+4x-x(x+6) = 0,$

$4x+24+4x-x^2-6x = 0,$

$x^2 -2x-24 = 0.$

$D = 100,$

$x_1 =-4$ — не задовольняє умову задачі, $x_2=6$.

Відповідь. Перший насос заповнює бак за 6 год.

10. Два крани можуть заповнити водою бак за 6 хв. Якщо перший кран заповнить 0,6 бака, а решту — другий, то бак буде заповнений водою за 12 хв. За скільки хвилин кожен кран, працюючи окремо, може заповнити весь бак?

Розв'язання

Нехай перший кран може заповнити бак за x хв, а другий — за y хв. Ємність бака приймаємо за 1. Тоді $\frac{1}{x}$ — частина бака, яку заповнює перший кран за 1 хв, $\frac{1}{y}$ — частина бака, яку заповнює водою другий кран за 1 хв.

Оскільки обидва крани можуть заповнити бак за 6 хв, то маємо рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}.$$

Якщо перший кран заповнить $0{,}6=\frac{3}{5}$ частини бака, то він працюватиме $\frac{3}{5}:\frac{1}{x}=\frac{3}{5}x$ (хв). $0{,}4=\frac{2}{5}y$ (хв) — час роботи другого крана.

$\left(\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y\right)$хв. – час роботи обох кранів, що за умовою задачі дорівнює 12 хв. Складаємо друге рівняння:

$$\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y=12.$$

Маємо систему:

$$\begin{cases}\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y=12,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{60-2y}{3}\\ \frac{3}{60-2y}+\frac{1}{y}-\frac{1}{6}=0.\end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи:

$$\begin{cases}18y+6(60-2y)-y(60-2y)=0,\\ y\neq 0,\\ y\neq 30;\end{cases}$$

$18y+360y-12y-60y+2y^2=0$,

$2y^2-54y+360 = 0$,

$y^2-27y+180 = 0$.

$D = 729-720 = 9$,

$y_1=\frac{27-3}{2}=12,\quad y_2=\frac{27+3}{2}=15.$

З першого рівняння системи, підставляючи значення y_1 і y_2 одержуємо:

$$y_1=\frac{60-2\cdot 12}{3}=12,\quad x_2=\frac{60-2\cdot 5}{3}=10.$$

(12; 12) і (10; 15) — розв'язки системи. Оскільки продуктивність кранів різна, то розв'язок системи (12; 12) не відповідає умові задачі.

Отже, перший кран може заповнити бак водою за 10 хв, а другий — за 15 хв.

Відповідь. 10 і 15 хв.

11. Резервуар заповнюється через два крани *A* і *B*. Заповнення резервуару тільки через кран *A* відбувається на 22 хв довше, ніж через кран *B*. Якщо ж відкрити обидва крани, то резервуар заповниться за 1 год. За який проміжок часу кожний кран окремо може заповнити резервуар?

Розв'язання

Нехай x хв — проміжок часу, за який кран *A* заповнює резервуар, а (x-22) хв — кран *B*.

За умовою задачі, припустивши, що ємність резервуара дорівнює 1, складаємо рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-22}=\frac{1}{60},$$

у якому $x > 22$.

Після перетворень одержуємо:

x^2 -142x+1320 = 0.

D = 20164-5280 = 14 884,

$x_1 = \frac{142-122}{2} = 10$ — не відповідає умові задачі, оскільки x>22,

$x_2 = \frac{142-122}{2} = 132.$

Таким чином, кран *A* може заповнити резервуар за 132 хв, тоді кран *B* —за 132-22 = 110 (хв).

Відповідь. 132 хв і 110 хв.

12.Для побудови будинку потрібно вийняти 8000 м^3 ґрунту за певний час. Роботу закінчили на 8 днів раніше, оскільки щодня перевиконували завдання на 50 м^3. За скільки днів планували закінчити роботу?

Розв'язання

Нехай x м^3 грунту потрібно виймати щодня за планом, (x+50) м^3 грунту — виймали щодня.

$\frac{8000}{x}$ днів — час виконання роботи за планом.

$\frac{8000}{x+50}$ днів — за стільки фактично виконали роботу.

Складаємо рівняння:

$$\frac{8000}{x} - \frac{8000}{x+50} = 8,$$

де x>0.

$8000(x+50)-8000x-8x(x+50) = 0,$

$8000x+400\,000 - 8000x-8x^2 - 400x = 0,$

$x^2+50x-50\,000 = 0,$

$x_1 = -250$ — не задовольняє умову задачі, $x_2 = 200$.

Отже, 200 м^3 — щоденна норма за планом, тоді 8000:200=40 (днів) — час виконання роботи за планом.

Відповідь. 40 днів.

13.Бригада робітників повинна була за певний час виготовити 272 деталі. Через 10 днів після початку роботи бригада почала виготовляти щодня понад норму 4 деталі і вже за день до строку виготовила 280 деталей. Скільки всього деталей виготовила бригада?

Розв'язання

Нехай x деталей — щоденна норма за планом, тоді (x+4) деталей — бригада почала виготовляти через 10 днів після початку роботи.

$\frac{272}{x}$ днів — час, за який бригада мала виготовити 272 деталі.

Нехай y днів — час, протягом якого бригада почала виготовляти щодня на 4 деталі понад норму. За умовою задачі

$$\frac{272}{x}-1=10+y,$$

Звідси $y=\frac{272}{x}-11.$

За 10 днів бригада виготовила $10x$ деталей. За y днів бригада виготовила $(x+4)y$ деталей, що разом становить 280 деталей.

$$10x+(x+4)x = 280.$$

Маємо систему:

$$\begin{cases} y=\frac{272}{x}-11, \\ 10x+4y+xy-280=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{272}{x}-11 \\ 10x+4\left(\frac{272}{x}-11\right)+x\left(\frac{272}{x}-11\right)-280=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{272}{x}-11, \\ 10x+\frac{1088}{x}-44+272-11x-280=0, \\ x>0, \\ y>0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{272}{x}-11; \\ -x+\frac{1088}{x}-52=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{272}{x}-11, \\ x^2+52x-1088=0. \end{cases}$$

Виписуємо друге рівняння і розв'язуємо його:

$x^2 + 52x$-$1088 = 0.$

$D = 2704 + 4352 = 7056,$

$x_1=\frac{-52-84}{2}<0$ — не задовольняє умову задачі,

$$x_2 = \frac{-52+84}{2} = 16,$$

$$y = \frac{272}{16} - 11 = 17 - 11 = 16.$$

(16; 6) — розв'язок системи, що задовольняє умову задачі.

Отже, 16 деталей — щоденна норма за планом, 6 днів — час, протягом якого бригада виготовляла по 20 деталей. Після цього до строку залишився один день. Знайдемо, скільки всього деталей виготовила бригада.

1) 1610 = 160 (деталей) — виготовили за 10 днів.

2) 20 · 6 = 120 (деталей) — виготовили за 6 днів.

3) 20 деталей виготовила бригада за день, що залишився до строку.

4)160+120+ 20 = 300 (деталей) — всього виготовила бригада.

Відповідь. 300 деталей.

Р О З Д І Л II
ЗАДАЧІ АЛГЕБРАЇЧНОГО ЗМІСТУ

1. Число 180 записати у вигляді суми трьох додатних чисел так, щоб два з них відносились як 1:2, а добуток усіх трьох доданків був найбільшим.

Розв'язання

Нехай x — перший доданок. Оскільки два доданки відносяться як 1:2, то другий доданок можна виразити через $2x$, а третій — $180-(x + 2x) = 180-3x$.

Таким чином, число 180 можна записати у вигляді $x+2x+(180-3x)$.

Складаємо добуток:

$$x\cdot 2x\cdot(180-3x) = 360x^2-6x^3$$

Розглянемо одержаний вираз як функцію від x:

$$f(x) = 360x^2 -6x^3$$

і дослідимо її на найбільше значення.

$f(x) =720x-18x^2$,

$f(x)=0$,

$720x-18x^2 = 0$,

$18x(40-x) = 0$.

Через те, що $0<x<180$, то $x = 40$ — критична точка, при якій функція $f(x)=360x^2 - 6x^3$ набуває найбільшого значення, оскільки при переході через цю точку похідна змінює знак з «+» на «-».

Отже, 40 — додатне число, що є першим доданком, тоді 80 — другий доданок і 180-(40+80) = 60 – третій. Число 180 можна записати так: 180 = 40+80+60.

Відповідь. 180 = 40 + 80 + 60.

2. Якщо деяке двоцифрове число помножити на суму його цифр, то вийде 405. Якщо помножити число, записане тими самими цифрами у зворотному порядку, на суму його цифр, то вийде 486. Знайти це число.

Розв'язання

Нехай $(10x+y)$ — дане двоцифрове число, у якого x — перша цифра (число десятків), а y — друга цифра (число одиниць). Тоді $(x+y)$ — сума його цифр. За умовою задачі складаємо перше рівняння:

$$(10x+y)(x+y)=405.$$

$(10y+x)$ — число, записане тими самими цифрами у зворотному порядку. Складаємо друге рівняння:

$(10y+x)(x+y)=486$.

Маємо систему:

$$\begin{cases}(10x+y)(x+y)=405,\\(10y+x)(x+y)=486;\end{cases}$$

$$\begin{cases}10x^2+xy+10xy+y^2=405,\\10xy+x^2+10y^2+xy=486;\end{cases}$$

$$\begin{cases}10x^2+11xy+y^2=405,\\x^2+11xy+10y^2=486.\end{cases}$$

Помножимо перше рівняння системи на 6, друге — на 5:

$$\begin{cases} 60x^2 + 66xy + 6y^2 = 2430, \\ 5x^2 + 55xy + 50y^2 = 2430. \end{cases}$$

Від першого рівняння системи віднімемо друге:

$55x^2 + l1xy - 44y^2 = 0$,

$5x^2 + xy - 4y^2 = 0$.

Одержали однорідне рівняння. Поділимо його на $y^2 \pm 0$.

$$5\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) - 4 = 0.$$

Нехай $\frac{x}{y} = t$, тоді $5t^2 + t - 4 = 0$.

$D = 81$,

$t_1 = \frac{-1-9}{10} = -1, \quad t_2 = \frac{-1+9}{10} = \frac{4}{5}.$

Повертаючись до заміни $\frac{x}{y} = t$, маємо:

$$\frac{x}{y} = -1 \text{ або } \frac{x}{y} = \frac{4}{5}.$$

Оскільки $x>0$ і $y>0$, то $\frac{x}{y} = -1$ — не задовольняє умову задачі.

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}y, \\ \frac{16}{25}y^2 + \frac{44}{5}y^2 + 10y^2 = 486; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}y, \\ \frac{486}{25}y^2 = 486; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}y, \\ y^2 = 25; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 5, \\ x = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4, \\ y = -5. \end{cases} \end{array}\right.$$

(-4; -5) — не задовольняє умову, що $x > 0$, $y > 0$.

Отже, $x = 4,\ y = 5$.

Відповідь. Дане двоцифрове число дорівнює 45.

3. Якщо двоцифрове число розділити на суму його цифр, то дістанемо частку 4 і остачу 3. Якщо ж це число розділити на добуток його цифр, то дістанемо частку 3 і остачу 5. Знайти це двоцифрове число.

Розв'язання

Нехай $10x+y$ — дане двоцифрове число, $x,\ y \in N$, причому $x \in [1;\ 9],\ y \in [0;\ 9]$ (x і y - цифри).

За умовою задачі складаємо рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{10x+y}{x+y} = 4 + \dfrac{3}{x+y}, \\ \dfrac{10x+y}{xy} = 3 + \dfrac{5}{xy}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + y = 4x + 4y + 3, \\ 10x + y = 3xy + 5, \\ x + y \neq 0, \\ xy \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 4y + 3 = 3xy + 5, \\ 10x + y = 4x + 4y + 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3xy = 5 - 3 - 4y, \\ 6x - 3y = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(4 - 3xy) = 2 - 4y, \\ 6x - 3y - 3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2-4y}{4-3y}, \\ 6x - 3y - 3 = 0, \\ 4 - 3y \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{12-24y}{4-3y} - 3y - 3 = 0, \\ y \neq \dfrac{4}{3}; \end{cases}$$

$12\text{-}24y\text{-}(3y+3)(4\text{-}3y)= 0,$

$12\text{-}24y\text{-}12y\text{-}12+ 9y^2+9y = 0,$

$9y^2 - 27y = 0$,

$9y(y-3) = 0$,

$y \neq 0$,

$y = 3$,

$$x = \frac{2 - 4 \cdot 3}{4 - 3 \cdot 3} = 2.$$

Отже, (2; 3) — розв'язок системи.

Відповідь. 23.

4. Знайти чотири послідовні натуральні числа, якщо різниця між добутком двох більших чисел і добутком двох інших чисел дорівнює 58.

Розв'язання

Нехай x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ — чотири послідовні натуральні числа ($x > 1$).

Складаємо рівняння: $(x+3)(x+2) - x(x+1) = 58$,

$x^2 + 5x + 6 - x^2 - x = 58$,

$4x = 52$,

$x = 13$.

Отже, 13, 14, 15, 16— чотири задані послідовні натуральні числа.

Перевірка.

$15 \cdot 16 - 13 \cdot 14 = 240 - 182 = 58$.

Відповідь. 13, 14, 15, 16.

5. Знайти три послідовні парні числа, якщо різниця між добутком двох більших чисел і квадратом меншого числа дорівнює 188.

Розв'язання

Нехай $2n$, $2n+2$, $2n+4$ — послідовні парні числа, де $n > 1$.

Складаємо рівняння:

$(2n+4)(2n+2) - (2n)^2 = 188$,

$4n^2 + 8n + 4n + 8 - 4n^2 = 188$,

$12n = 180$,

n = 15;

2n = 30,

2n + 2 = 32,

2n + 4 = 34.

Перевірка.

$32 \cdot 34 = 1088$, $30^2 = 900$, $1088 - 900 = 188$.

Відповідь. 30, 32, 34.

6. Сума квадратів цифр двоцифрового числа дорівнює 13. Якщо від цього числа відняти 9, то одержимо число, записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку. Знайти дане число.

Розв'язання

Нехай $10x+y$ — дане двоцифрове число, де x і y — його цифри. За умовою задачі: $x^2+y^2=13$.

$10y+x$ — число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. За умовою задачі:

$$10x+y-9 = 10y+x.$$

Маємо систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ 10x+y-9=10y+x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ 9x-9y=9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1+y, \\ (1+y)^2+y^2=13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1+y, \\ y^2+y-6=0; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=-2, \\ y_1=-3; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=2, \end{cases} \end{array} \right.$$

(-2; -3) і (3; 2) — розв'язки системи.

(-2; -3) — не задовольняє умову задачі.

Відповідь. 32.

7. Знайти чотири числа, що утворюють пропорцію, у якої сума крайніх членів дорівнює 14, а сума середніх членів дорівнює 11. Відомо, що сума квадратів усіх чотирьох чисел дорівнює 221.

Розв'язання

Нехай *a, b, c* і *d* — дані чотири числа, які утворюють пропорцію, тобто:

$$a:b = c:d,\ \ a\neq 0,\ \ b\neq 0,\ \ c\neq 0,\ \ d\neq 0.$$

Тоді *a* і *d* — крайні члени. За умовою задачі

$$a + d = 14.$$

Звідси $d = 14-a$.

b і *c* — середні члени. За умовою $b+c=11$.

Звідси $c=11-b$.

Знайдемо суму квадратів усіх чотирьох чисел.

$a^2 +b^2 +c^2 +d^2 =a^2 +b^2 + (11-b)^2 +(14-a)^2=a^2+b^2 +121-22b+b^2+196-28a+a^2=$

$= 2a^2+2b^2-28a-22b+317.$

За умовою задачі ця сума дорівнює 221. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2a^2+2b^2-28a-22b+317=221, \\ a:b=(11-b):(14-a); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2+2b^2-28a-22b+96=0, \\ a(14-a)=b(11-b); \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2-14a-11b+48=0, \\ -a^2+14a+b^2-11b=0; \end{cases}$$

Виконаємо алгебраїчне додавання:

$2b^2 -226 + 48 = 0,$

$b^2-11b+24=0;$

$b_1=3,\ \ b_2=8.$.

Тоді

$$-a^2 + 14a+3^2 -11\cdot 3 = 0,$$

$$a^2 -14a + 24 = 0;$$

$$a_1 =2, \quad a_2 =12.$$

або:

$$-a^2 +14a + 8^2 -11\cdot 8 = 0,$$

$$a^2 -14a+ 24 = 0,$$

$$a_3 = 2, \quad a_4 =12.$$

(2; 3), (12; 3), (2; 8), (12; 8) - розв'язки системи.

$d_1=14\text{-}2 = 12,$

$d_2= 14\text{-}12 = 2,$

$d_3 =14\text{-}2 = 12,$

$d_4=14\text{-}12 = 2,$

$c_1 =11\text{-}3 = 8,$

$c_2 = 11\text{-}3 = 8,$

$c_3 = 11\text{-}8 = 3,$

$c_4 = 11\text{-}8 = 3.$

Одержали чотири варіанти послідовності запису чисел:

1) 2, 3, 8, 12;

2) 12, 3, 8, 2;

3) 2, 8, 3, 12;

4) 12, 8, 3, 2.

У кожному з чотирьох записів числа утворюють пропорцію, причому сума крайніх членів дорівнює 14, а сума середніх — 11.

Отже, шукані числа — це 12, 8, 3, 2.

Відповідь. 12, 8, 3, 2.

8. Чисельники трьох дробів пропорційні до чисел 1, 2, 5, а знаменники — відповідно до чисел 1, 3, 7. Знайти ці дроби, якщо їх середнє арифметичне дорівнює $\frac{200}{441}$.

Розв'язання

Нехай a — чисельник першого дробу, тоді $2a$ — чисельник другого дробу, а $5a$ — чисельник третього дробу.

b, $3b$, $7b$ — знаменники першого, другого і третього дробів відповідно, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

$\frac{a}{b}$, $\frac{2a}{3b}$, $\frac{5a}{7b}$ - дані дроби.

Знайдемо їх середнє арифметичне.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{2a}{3b}+\frac{5a}{7b}\right):3=\left(\frac{21a+14a+15a}{21b}\right):3=\frac{50a}{63b}.$$

За умовою задачі воно дорівнює $\frac{200}{441}$..

Складаємо рівняння:

$$\frac{50a}{63b}=\frac{200}{441},$$

$$\frac{a}{b}=\frac{4}{7},$$

Отже, $\frac{4}{7}$ перший дріб.

Тоді $\frac{8}{21}$, $\frac{20}{49}$ другий і третій дроби.

Відповідь. $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{20}{49}$

9. Найбільший спільний дільник двох додатних чисел, одне з яких становить $\frac{3}{4}$ другого, дорівнює 27. їх найменше спільне кратне дорівнює 324. Знайти ці числа.

Розв'язання

Нехай a — одне з даних чисел, тоді $\frac{3}{4}a$ — друге число. За умовою їх найбільший спільний дільник дорівнює 27, тому дані числа можна розкласти на множники:

$a = 27x$, $\frac{3}{4}a = 27y$, де x і y — невідомі множники.

Звідси випливає, що $27xy$ — найменше спільне кратне даних чисел, що за умовою дорівнює 324:

$$27xy = 324.$$

Складаємо систему:

$$\begin{cases} 27xy = 324, \\ 27x = a, \\ 27y = \dfrac{3}{4}a. \end{cases}$$

Виразимо x і y через a. Тоді система набирає вигляду:

$$\begin{cases} 27xy = 324, \\ x = \dfrac{a}{27}, \\ y = \dfrac{a}{36}. \end{cases}$$

$27 \cdot \frac{a}{27} \cdot \frac{a}{36} = 324,$

$a^2 = 36 \cdot 324,$

$a = \pm\sqrt{36 \cdot 324},$,

$a_1 = 108$, $a_2 = -108$ — не задовольняє умову задачі.

$\frac{3}{4}a = 81.$

Перевірка.

НСД (108, 81) = 27; НСК(108, 81) - 324.

Відповідь. 108, 81.

Р О З Д І Л III

ЗАДАЧІ ФІЗИЧНОГО ЗМІСТУ

1. Один потяг за годину проходить 60 км, а другий — 40 км. Визначити відстань між двома містами, якщо перший потяг проходить цю відстань на 2 год 15 хв швидше, ніж другий.

Розв'язання

Нехай s— відстань між містами. Тоді перший потяг проходить цю відстань за $\frac{s}{60}$ год, а другий за $\frac{s}{40}$ год. За умовою задачі

$$\frac{s}{60}+2\frac{1}{4}=\frac{s}{40},$$

$$\frac{s}{60}-\frac{s}{40}=-2\frac{1}{4},$$

$$\frac{s}{120}=\frac{9}{4},$$

s=270

Відповідь. 270 км.

2. Потяг повинен пройти 54 км. Пройшовши 14 км, він був затриманий на 10 хв біля семафора. Збільшивши початкову швидкість на 10 км/год, він прибув до місця призначення із запізненням на 2 хв. Визначити початкову швидкість потяга.

Розв'язання

Нехай x км/год — початкова швидкість потяга. Тоді $\frac{54}{x}$ год — час. за яким за графіком потяг повинен пройти відстань 54 км.

$\frac{14}{x}$ год —час витрачений до зупинки.

$(x+10)$ км/год — швидкість потяга після зупинки.

$\frac{40}{x+10}$ год — час, витрачений після зупинки.

За умовою задачі на зупинку потяг витратив *10* хв. $=\frac{1}{6}$ год і прибув до місця призначення із запізненням на 2 хв = $\frac{1}{30}$ год.

Маємо рівняння:

$$\frac{14}{x}+\frac{1}{6}+\frac{40}{x+10}-\frac{54}{x}=\frac{1}{30},$$

де $x>0$.

$$\frac{14}{x}+\frac{40}{x+10}-\frac{54}{x}+\frac{2}{15}=0,$$

$$\frac{14\cdot 15(x+10)+40\cdot 15x-54\cdot 15(x+10)+2x(x+10)}{15x(x+10)}=0,$$

Оскільки $x>0$,то $15x(x+10)\neq 0$.

$210x+2100+600x-810x-8100+2x^2+20x=0,$

$2x^2+20x-6000=0,$

$x^2+10x-3000=0,$

$x_1=-60$ — не задовольняє умову задачі,

$x_2=50.$

Відповідь. 50 км/год.

3. Від пристані A одночасно вирушили за течією катер та пліт. Катер пройшов за течією 96 км, потім повернув назад і прибув у пункт A через 14 год. Знайти швидкість катера у стоячій воді та швидкість течії, якщо катер зустрів пліт на зворотному шляху на відстані 24 км від A .

Розв'язання

Нехай x км/год — швидкість течії, а y км/год — швидкість катера у стоячій воді ($x>0,x>0$). Тоді $\frac{24}{x}$ год — час руху плоту, $\frac{96}{y+x}$ год — час руху катера за течією.

$\frac{96}{y-x}$год — час руху катера проти течії. За умовою задачі катер пройшов шлях за течією і повернувся назад у пункт A за 14 год, тобто:

$$\frac{96}{x+y}+\frac{96}{y-x}=14.$$

До зустрічі з плотом катер витратив $\left(\frac{96}{x+y}+\frac{72}{y-x}\right)$год, тому $\frac{24}{x}=\frac{96}{x+y}+\frac{72}{y-x}$.

Отже, маємо систему:

$$\begin{cases}\frac{96}{x+y}+\frac{96}{y-x}=14,\\ \frac{24}{x}=\frac{96}{x+y}+\frac{72}{y-x},\end{cases}$$

де $x > 0, y > 0.$

$$\begin{cases}96(y-x)+96(x+y)-14(y^2-x^2)=0,\\ 24(y^2-x^2)-96x(y-x)-72x(x+y)=0,\\ x\neq 0,\\ y^2-x^2\neq 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}96y-96x+96x+96y-14y^2+14x^2,\\ 24y^2-24x^2-96xy+96x^2-72x^2-72xy=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}14x^2-14y^2+192y=0,\\ 24y^2-168xy=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}7x^2-7y^2+96y=0,\\ y^2-7xy=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x^2 - 7y^2 + 96y = 0, \\ y(y - 7x) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \neq 0, \\ y = 7x, \\ 7x^2 - 7(7x)^2 + 96 \cdot 7x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7x, \\ -48x^2 + 96x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7x, \\ 2x - x^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x = 2, \\ y = 14. \end{cases}$$

Отже, 2 км/год — швидкість течії, 14 км/год — власна швидкість катера, тобто швидкість катера у стоячій воді.

Відповідь. 14 км/год, 2 км/год.

4. Студенти взяли на човновій станції на прокат човен. Спочатку вони пропливли 20 км за течією річки, а потім повернулися на станцію, витративши на всю прогулянку 7 год. На зворотному шляху на відстані 12 км від станції вони зустріли пліт, який пропливав повз станцію саме в той момент, коли студенти вирушали на прогулянку. Визначити, з якою швидкістю рухався човен за течією і яка швидкість течії.

Розв'язання

Нехай x км/год — швидкість течії, а y км/год — швидкість човна у стоячій воді.

Тоді (x+y) км/год, (y-x) км/год — швидкість човна за течією річки і проти течії відповідно.

$\frac{12}{x}$ год — час руху плоту від прокатної станції до зустрічі з човном.

$\frac{20}{x+y}$ год — час руху човна за течією річки.

$\frac{20}{y-x}$ год — час руху човна проти течії річки.

За умовою задачі

$$\frac{20}{x+y}+\frac{20}{y-x}=7.$$

$\left(\frac{20}{x+y}+\frac{8}{y-x}\right)$ год — час руху човна до зустрічі з плотом, що дорівнює часу руху плоту від станції до зустрічі з човном, тоді:

$$\frac{12}{x}=\frac{20}{x+y}+\frac{8}{y-x}.$$

Складаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{20}{x+y}+\frac{20}{y-x}=7, \\ \frac{12}{x}=\frac{20}{x=y}+\frac{8}{y-x}, \end{cases}$$

у якій $x \neq y$, $x>0$ і $y>0$. Після спрощень одержуємо:

$$\begin{cases} 7x^2-7y^2+40y=0, \\ 12y^2-28xy=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{7}y, \\ 7\cdot\left(\frac{3}{7}y\right)^2-7^2+40y=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{7}y, \\ 40y-\frac{40}{7}y^2=0. \end{cases}$$

Оскільки $y \neq 0$ то:

$$\begin{cases} \mathrm{x}=\frac{3}{7}y, \\ 1-\frac{1}{7}y=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3, \\ y=7. \end{cases}$$

Отже, 3 км/год — швидкість течії, 7 км/год — швидкість човна у стоячій воді, 7+3-10 (км/год) — швидкість човна за течією.

Відповідь. 10 км/год, 3 км/год.

5. Човен долає відстань 392 км за течією річки на 14 год швидше, ніж проти течії. Швидкість течії на 14 км/год менша від власної швидкості човна. Визначити швидкість течії річки.

Розв'язання

Нехай *x* км/год — швидкість течії річки. Тоді власна швидкість човна (x+14) км/год.

$14+x+x = 14+2x$ (км/год) —швидкість човна за течією річки.

$14+x-x = 14$ (км/год) — швидкість човна проти течії.

$392:14 = 28$ (год) — час, за який човен долає відстань 392 км проти течії.

$$\frac{392}{14+2x}+14=28,$$

$$\frac{392}{14+2x}-14=0,$$

$$\begin{cases} 392-14(14+2x)=0, \\ 14+2x\neq 0, \end{cases}$$

$x>0,$

$28-14+2x=0,$

$2x=14,$

$x=7.$

Відповідь. 7 км/год.

6. Катер подолав 8 км проти течії річки, повернув назад і пройшов за течією 36 км. Рейс тривав 2 год. Потім катер подолав 6 км проти течії річки, а за течією — 33 км, витративши на рейс 1 год 45 хв. Визначити швидкість катера у стоячій воді.

Розв'язання

Нехай *x* км/год — швидкість катера у стоячій воді, а *y* км/год — швидкість течії річки $(x>0, y>0)$.

$(x-y)$ км/год — швидкість катера проти течії, а $(x+y)$ км/год — швидкість катера за течією річки.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{x-y}+\dfrac{36}{x+y}=2, \\ \dfrac{6}{x-y}+\dfrac{33}{x+y}=\dfrac{7}{4}, \end{cases}$$

де $x>0,\ y>0,\ x\neq y$.

$$\begin{cases} 8(x+y)+36(x-y)-2(x^2-y^2)=0, \\ 24(x+y)+132(x-y)-7(x^2-y^2)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 44x-28y-2x^2+2y^2=0, \\ 156x-108y-7x^2+7y^2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22x-14y-x^2+y^2=0, \\ 156x-108y-7x^2+7y^2=0. \end{cases}$$

Помножимо рівняння на 7 і віднімемо від першого рівняння друге. Маємо:

$$\begin{cases} -2x+10y=0, \\ 22x-14y-x^2+y^2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5y, \\ 22\cdot(5y)-14y-(5y)^2+y^2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5y, \\ 96y-24y^2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5y, \\ 24y(4-y)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5y, \\ y\neq 0, \\ 4-y=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=20, \\ y=4. \end{cases}$$

(20; 4) — розв'язок системи.

Вілмвіль. 20 км/год.

7. Пішохід і велосипедист вирушають одночасно назустріч один одному з пунктів A і B, відстань між якими 40 км, і зустрічаються через 2 год після початку руху. Потім вони продовжують свій шлях, причому велосипедист прибуває в A на 7

год 30 хв раніше, ніж пішохід у B. Знайти швидкість пішохода і велосипедиста, знаючи, що обидва весь час рухалися з незмінними швидкостями.

Розв'язання

Нехай *x* км/год, *y* км/год — швидкості пішохода і велосипедиста відповідно *(x>0, y>0, y>x)*.

Тоді $\frac{40}{x}$ год — час руху пішохода з пункту A *в* B , $\frac{40}{y}$ год — час руху велосипедиста з пункту B в пункт A .

2x км — відстань, яку пройшов пішохід до зустрічі.

2y км — відстань, яку проїхав велосипедист до зустрічі.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x+2y=40, \\ \frac{40}{x}-\frac{40}{y}=7\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=20, \\ \frac{40}{x}-\frac{40}{y}-\frac{15}{2}=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=20-y, \\ \frac{40}{20-y}-\frac{40}{y}-\frac{15}{2}=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=20-y, \\ 80y-1600+80y-300y+15y^2=0, \\ x\neq 0, \\ y\neq 0, \\ y\neq 20; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y^2-28y-320=0, \\ x=20-y. \end{cases}$$

$y_1=\frac{28-68}{6}<0$— не задовольняє умову задачі,

$y_2=\frac{28+68}{6}=16,$ відповідне значення *x=4*.

(4; 16) — розв'язок системи, що задовольняє умову задачі. .

Відповідь. 4 км/год, 16 км/год.

8. До матеріальної точки прикладено дві сили, кут між якими дорівнює 30^{o}. Значення однієї з прикладених сил у $7\sqrt{3}$ раза більше, ніж значення другої, а значення рівнодійної сили на 24 Н більше, ніж значення меншої сили. Визначити значення меншої та рівнодійної сил.

Розв'язання

Нехай x Н — значення меншої сили, тоді $(7x\sqrt{3})$Н — значення більшої сили, а

$(x + 24)$ Н — значення рівнодійної сили, де $x>0$.

Відомо, що рівнодійна сила є векторною сумою сил, прикладених до матеріальної точки.

Геометрично — це довжина діагоналі паралелограма, побудованого на сторонах x і $7x\sqrt{3}$, причому тієї діагоналі, що виходить з вершини кута 30°, тобто діагональ лежить проти кута 150°. За теоремою косинусів:

$(x+24)^2 = x^2 + (7x\sqrt{3})^2 - 2x \cdot 7x\sqrt{3} \cos 150°,$

$x^2 + 48x + 576 = x^2 + 147x^2 + 14x^2\sqrt{3} \cos 30°,$

$48x+576 = 147x^2+21x^2,$

$168x^2 - 48x - 576 = 0,$

$7x^2 - 2x - 24 = 0 .$

$D = 4+672 = 676,$

$x_1 = \frac{2-26}{14} < 0$ — не задовольняє умову задачі, $x_2 = \frac{2+26}{14} = 2.$

Отже, значення меншої сили дорівнює 2 Н, а рівнодійної сили 26 Н.

Відповідь. 2 Н, 26 Н.

Р О З Д І Л IV
ЗАДАЧІ ГЕОМЕТРИЧНОГО ЗМІСТУ

1. Із порту одночасно вийшли два теплоходи, перший — на північ, другий — на схід. Через 2 год відстань між ними була 60 км. Знайти швидкість першого теплохода, якщо вона на 6 км/год більша за швидкість другого.

Розв'язання

Нехай x км/год — швидкість першого теплохода ($x>0$), тоді (x-6) км/год — швидкість другого теплохода.

$2x$ км — шлях, що пройшов перший теплохід за 2 год.

$2(x-6)$ км — шлях, що пройшов другий теплохід за 2 год.

Оскільки перший теплохід рухався на північ, а другий — на схід, то напрями їх руху утворюють прямий кут. Можна скласти геометричну модель задачі. Це прямокутний трикутник, у якому $2x$ і $2(x\text{-}6)$ — довжини катетів, а 60 — довжина гіпотенузи. За теоремою Піфагора:

$(2x)^2+(2(x-6))^2=60^2,$

$4x^2+4x^2 - 48x+144 - 3600 = 0,$

$8x^2-48x-3456 = 0,$

$x^2 -6x-432 = 0.$

$D = 36 + 1728 = 1764,$

$x_1 = \frac{6-42}{2} = -18$ — не задовольняє умову задачі, $x_2 = \frac{6+42}{2} = 24.$

Відповідь. 24 км/год.

2. У прямокутному трикутнику катети відносяться як 3:2, а висота ділить гіпотенузу на відрізки, один з яких на 2 см більший від другого. Знайти довжину гіпотенузи.

Розв'язання

Нехай x см — більший із відрізків, на які висота ділить гіпотенузу, тоді $(x\text{-}2)$ см — довжина другого відрізка.

$x+x-2 = 2x-2$ (см) — довжина гіпотенузи.

Якщо k — коефіцієнт пропорційності, то $3k$ см — довжина більшого катета.

За теоремою Піфагора:

$$(3k)^2+(2k)^2=(2x-2)^2$$

Катет є середнім пропорційним між гіпотенузою та його проекцією на гіпотенузу. Проекція катета довжиною $3k$ см є відрізок x см, оскільки більшому катету відповідає більша проекція. Тоді:

$$(3k)^2=(2x-2)x.$$

Маємо систему:

$$\begin{cases} 9k^2 + 4k^2 = (2x-2)^2, \\ 9k^2 = x(2x-2), \end{cases}$$

де $k>0$ і $k>0$.

$$\begin{cases} 13k^2 = 4x^2 - 8x + 4, \\ 9k^2 = 2x^2 - 2x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} k^2 = \dfrac{2x^2 - 2x}{9}, \\ 13 \cdot \dfrac{2x^2 - 2x}{9} = 4x^2 - 8x + 4. \end{cases}$$

Виписуємо друге рівняння і розв'язуємо його.

$13(2x^2-2x)=9(4x^2-8x+4),$

$26x^2 - 26x - 36x^2 + 72x - 36 = 0,$

$-10x^2 + 46x - 36 = 0,$

$5x^2 - 23x + 18 = 0.$

$D = 169,$

$$x_1 = \frac{23-13}{10} = 1, \quad x_2 = \frac{23+13}{10} = 3{,}6$$

Оскільки через x позначено більшу частину катета, то умову задачі задовольняє значення x_2. Тоді гіпотенуза дорівнює 7,2-2= 5,2 (см).

Відповідь. 5,2 см.

3. Довжина одного з катетів прямокутного трикутника на 3 більша від довжини другого катета. Знайти довжину більшого катета, якщо площа трикутника дорівнює 9.

Розв'язання

Нехай x — довжина меншого з катетів ($x>0$). Тоді ($x+3$) — довжина другого катета.

$\frac{1}{2}x(x+3) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right)$— площа прямокутного трикутника.

Складаємо і розв'язуємо рівняння.

$$\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} = 0,$$

$x^2+3x-18=0,$

$x_1 = -6$ — не задовольняє умову задачі, $x_2 = 3$.

Отже, 3 — довжина меншого катета, а 6 —довжина більшого катета.

Відповідь. 6.

4. Периметр прямокутника дорівнює 28 см, а сума площ квадратів, побудованих на суміжних сторонах прямокутника, дорівнює 116 см^2. Знайти сторони прямокутника.

Розв'язання

Нехай x см, y см — сторони прямокутника, тоді його периметр дорівнює $2(x+y)$ см або 28 см, тобто

$$x+y=14$$

Площа першого квадрата x^2, а другого — y^2, сума цих площ x^2+y^2, або 116 см^2. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y=14, \\ x^2+y^2=116; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=14-y, \\ 196-28y+y^2+y^2=116; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=14-y, \\ 2y^2-28y+80=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=14-y, \\ y^2-14y+40=40; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=14-y, \\ y=4; \textit{або} \quad y=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=10, \\ y=4; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x=4, \\ y=10. \end{cases}$$

Сторони прямокутника 4 см і 10 см.

Відповідь. 4 см, 10 см.

5. Периметр прямокутника дорівнює 34 см, а довжина його діагоналі 13 см. Знайти сторони прямокутника.

Розв'язання

Нехай x см і y см — сторони прямокутника, тоді його периметр дорівнює $2(x+y)$ см, або 34 см, тобто:

$$x+y=17.$$

За теоремою Піфагора квадрат діагоналі прямокутника:

$$13^2=x^2+y^2 \quad \text{або} \quad x^2+y^2=169$$

Складаємо систему рівнянь та розв'язуємо її.

$$\begin{cases} x+y=17, \\ x^2+y^2=169; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=17-y, \\ 289-34y+y^2+y^2=169; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=17-y, \\ 2y^2-34y+120=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=17-y, \\ y^2-17y+60=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=17-y, \\ y=5 \qquad \textit{àáî} \quad \mathrm{y}=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=12, \\ y=5; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x=5, \\ y=12. \end{cases}$$

Сторони прямокутника 5 см і 12 см.

Відповідь. 5 см, 12 см.

6.Площа прямокутного трикутника дорівнює 180 см^2. Знайти катети цього трикутника, якщо один із них більший за другий на 31 см.

Розв'язання

Нехай x см і y см — катети прямокутного трикутника, тоді його площа $\frac{1}{2}xy$ см^2

або

180 см^2, тобто

$$xy=360.$$

За умовою задачі один із катетів більший за другий на 31 см, тобто

$$x\text{-}y=31.$$

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x-y=31, \\ xy=360; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=31+y, \\ 31y+y^2-360=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 31 + y, \\ y^2 + 31y - 360 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 31 + y, \\ y = 9; \qquad \text{àáî} \quad y = -40 \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 40, \\ y = 9; \end{cases}$ або $\begin{cases} x = -95, \\ y = -40 \end{cases}$ — не задовольняє умову задачі.

Отже, катети прямокутного трикутника дорівнюють 40 см і 9 см.

Відповідь. 40 см, 9 см.

7. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 48 см, а його площа 96 см^2. Знайти сторони трикутника.

Розв'язання

Нехай катети прямокутного трикутника дорівнюють a см і b см, гіпотенуза — c см. Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} a + b + c = 48, \\ a^2 + b^2 = c^2, \\ \dfrac{ab}{2} = 96. \end{cases}$$

Помножимо обидві частини третього рівняння системи на 4 і додамо до другого рівняння. Одержуємо систему, рівносильну попередній:

$$\begin{cases} a + b + c = 48, \\ (a + b)^2 = 384 + c^2, \\ ab = 192. \end{cases}$$

З другого рівняння

$$a + b = \sqrt{384 + c^2}$$

де $a>0, b>0$ і $c>0$

$$\sqrt{384 + c^2} + c = 48,,$$

$$\sqrt{384 + c^2} = 48 - c,$$

$$384 + c^2 = 2304 - 96c + c^2$$

$96c = 1920,$

$c = 20.$

Система рівнянь

$$\begin{cases} a+b=28, \\ ab=192 \end{cases}$$

рівносильна першій системі. Маємо:

$\begin{cases} a=16, \\ b=12; \end{cases}$ або $\begin{cases} a=12, \\ b=16. \end{cases}$

Отже, катети трикутника дорівнюють 12 см і 16 см, а гіпотенуза — 20 см.

Відвовідь. 12 см, 16 см, 20 см.

8. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за один з його катетів на 32 дм, а за другий на 9 дм. Знайти площу трикутника.

Розв'язання

Нехай x см і y см — катети даного прямокутного трикутника, тоді гіпотенузу можна виразити через x і через y.

$$x+32 = y+9,$$

де $x > 0$ і $y > 0$.

За теоремою Піфагора:

$$x^2+y^2=(x+32)^2.$$

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+32=y+9, \\ x^2+y^2=(x+32)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x+23, \\ x^2+(x+23)^2=(x+32)^2; \end{cases}$$

Виписуємо друге рівняння системи і розв'язуємо його:

$x^2 + x^2 + 46x+529 = x^2 + 64x+1029,$

$x^2 -18x-495 = 0,$

$D= 324+1980 = 2304,$

$x_1 = \frac{18-48}{2} = -15$ — не задовольняє умову задачі,

$x_2 = \frac{18+48}{2} = 33.$

$$\begin{cases} x = 33, \\ y = 56; \end{cases}$$

Обчислимо площу прямокутного трикутника за формулою $S = \frac{ab}{2}$

$$S = \frac{33 \cdot 56}{2} = 924 \text{ дм}^2$$

Відповідь. 924 дм^2.

9. Периметр прямокутника 60 см. Якщо довжину прямокутника збільшити на 10 см, а ширину зменшити на 6 см, то площа його зменшиться на 32 см^2. Знайти площу прямокутника.

Розв'язання

Нехай *x* см — ширина прямокутника, *y* см — довжина прямокутника, причому *x*>0, *y*>0. Тоді

2(x+y) = 60, або *x+y=30* — периметр даного прямокутника, *xy* см^2 — площа даного прямокутника, *(y+10)(x-6)* см^2 — площа прямокутника після зміни довжин його сторін. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 30, \\ xy - (y+10)(x-6) = 32; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 - y, \\ xy - xy - 10x + 6y + 60 - 32 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 - y, \\ 5x - 3y - 14 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 - y, \\ 5(30 - y) - 3y - 14 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 - y, \\ 150 - 5y - 3y - 14 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 13, \\ y = 17. \end{cases}$$

Отже, 13 см —ширина прямокутника, 17 см — його довжина, а площа дорівнює *13 · 17* см^2.

Відповідь. 221 см^2.

10. Для спортмайданчика виділили ділянку прямокутної форми з діагоналлю 185 м. Виконуючи будівельні роботи, довжину кожної сторони зменшили на 4 м. При цьому прямокутна форма була збережена, але площа виявилася меншою на 1012 $м^2$. Які розміри спортмайданчика?

Розв'язання

Нехай *x* м, *y* м — початкові розміри спортмайданчика.

Тоді за теоремою Піфагора:

$$x^2+y^2=185^2.$$

Крім цього, за умовою:

$$(x-4)(y-4) = xy-1012.$$

Маємо систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=185^2, \\ xy-4y-4x+16=xy-1012; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=257, \\ x^2+y^2=185^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=257-x, \\ (257-x)^2+x^2=185^2; \end{cases}$$

$66\ 049 -514x+2x^2 -34\ 225 = 0,$

$2x^2-514x+31824 = 0,$

$x^2 -257x+15912 = 0.$

$D = 66\ 049 -63\ 648 = 2401,$

$x_1=\dfrac{257-49}{2}=104,\quad x_2=\dfrac{257+49}{2}=153,$ $y_1 =257-104 = 153, y_2=257-153 = 102.$

(104; 153) і (153; 104) — розв'язки системи.

Отже, початкові розміри майданчика 104 м і 153 м. Тоді остаточні розміри спортмайданчика: 100м × 149м.

Відповідь. 100 м, 149 м.

11. Ділянка прямокутної форми обгороджена парканом. Якщо від неї відрізати по прямій деяку частину так, що залишиться квадрат, то площа ділянки зменшиться на 400 м^2, а довжина паркану зменшиться на 20 м. Визначити початкові розміри ділянки.

Розв'язання

Нехай x м, y м — розміри ділянки, де $x > 0$, $y>0$ і $x<y$.

За умовою задачі складаємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} xy - x^2 = 400, \\ 2(x+y) - 4x = 20; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy - x^2 = 400, \\ x + y - 2x = 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 10, \\ xy - x^2 = 400; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 10, \\ x(x+10) - x^2 = 400; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 10, \\ x^2 + 10x - x^2 = 400; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x = 400, \\ y = x + 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 40, \\ y = 50. \end{cases}$$

(40; 50) — розв'язок системи.

Відповідь. 40 м × 50 м .

12. Дано прямокутний трикутник AOB з прямим кутом у точні O (0; 0). Вершини A і B лежать на осях Ox і Oy відповідно. У трикутник вписано коло радіуса R=10 см, яке дотикається до гіпотенузи у точці P. Знайти координати точок A, B і P, враховуючи, що $OA > OB$, а площа трикутника дорівнює 600 см^2.

Розв'язання

Нехай a і b — довжини катетів, тоді a-R+b-R=a+b-20 — довжина гіпотенузи. Очевидно, що

$$(a+b-20)^2=a^2+b^2 \text{ і } \frac{ab}{2} = 600.$$

Звідси a = 40 см, b= 30 см; тобто $A($40; 0); B(0;30).

Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої AB: $k=-\frac{3}{4}$. Отже, рівняння прямої AB має вигляд:

$$y=-\frac{3}{4}x+30,$$

а рівняння кола:

$$(x\text{-}10)^2 +(y\text{-}10)^2 = 100.$$

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+30, \\ (x-10)^2+(y-10)^2=100; \end{cases}$$

Розв'язком системи є координати точки P.

$$(x-10)^2+\left(-\frac{3}{4}x+20\right)^2=100,$$

$$x^2-20x+100+\frac{9}{16}x^2-30x+400=100,$$

$$\frac{25}{16}x^2-50x+400=0,$$

$$x^2\text{-}32x+256=0$$

$$D = 1024\text{-}1024=0,$$

$$x=\frac{32}{2}=16,$$

$$y=-\frac{3}{4}\cdot 16+30=18.$$

Отже, (16; 18) — розв'язок системи, тобто P(16; 18).

Відповідь. A (40; 0); R(0;30); P(16; 18).

Р О З Д І Л V

ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ

1. Відстань між селищами A і B дорівнює 5 км. Із A вирушили в B одночасно по одній дорозі два автотуристи, які повинні прибути в B в один і той самий час. Але перший турист прибув до B на n год раніше, а другий — на $3n$ год пізніше призначеного строку, оскільки другий проїжджав за кожну годину в середньому на m км менше, ніж перший. Визначити середню швидкість кожного автотуриста.

Розв'язання

Нехай t год — запланований час руху автотуристів.

v_1 км/год і v_2 км/год — швидкості першого і другого туристів відповідно, причому $t>0$, $v_1>0$, $v_2>0$. Тоді

$$\begin{cases} \dfrac{s}{v_1} = t - n, \\ \dfrac{s}{v_2} = t + 3n, \end{cases}$$

v_1-v_2=m

Віднімемо від другого рівняння перше:

$$S\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)=4n,$$

або

$$(v_1-v_2)s=4nv_1v_2,$$

звідси

$$v_1v_2=\frac{sm}{4n}$$

Зауважуємо, що розв'язками системи

$$\begin{cases} v_1+(-v_2)=m, \\ v_1\cdot(-v_2)=-\dfrac{sm}{4n}. \end{cases}$$

є корені квадратного рівняння

$$z^2-mz-\frac{sm}{4n}=0.$$

Розв'яжемо його

$$D=(-m)^2-4\cdot\left(-\frac{sm}{4n}\right)=m^2+\frac{sm}{n}=\frac{m(nm+s)}{n}=\frac{nm(mn+s)}{n^2}.$$

$$z_1=\frac{nm+\sqrt{nm(nm+s)}}{2n},$$

$$z_2=\frac{-nm+\sqrt{nm(nm+s)}}{2n},$$

Отже, $\dfrac{nm+\sqrt{nm(nm+s)}}{2n}$ км/год — швидкість першого автотуриста.

$\dfrac{-nm+\sqrt{nm(nm+s)}}{2n}$ км/год — швидкість другого автотуриста.

За умовою $n>0$, $m>0$, $s>0$, $\sqrt{nm(nm+s)}>nm$. Знайдені вирази для швидкостей додатні.

Відповідь. $\dfrac{nm+\sqrt{nm(nm+s)}}{2n}$ км/год, $\dfrac{-nm+\sqrt{nm(nm+s)}}{2n}$ км/год.

2. Швидкості пасажирського і товарного потягів відносяться як $a{:}b$. Пасажирський потяг вирушив від станції A на 0,5 год пізніше товарного, а прибув на станцію B на 0,5 год раніше від нього. Знайти швидкості пасажирського і товарного потягів, якщо відстань між A і B дорівнює s км.

Розв'язання

Нехай x км/год — швидкість пасажирського потяга, y км/год — швидкість товарного потяга, де $x>y>0$. Тоді $\frac{s}{x}$ год — час руху пасажирського потяга, $\frac{s}{y}$ год — час руху товарного потяга. За умовою задачі пасажирський потяг був у дорозі на 1 год менше, ніж товарний, тому

$$\frac{s}{y}-1=\frac{s}{x},$$

а їх швидкості є членами пропорції $x:y=a:b$.

Маємо систему:

$$\begin{cases}\frac{s}{y}-1-\frac{s}{x}=0,\\ \frac{x}{y}=\frac{a}{b};\end{cases}$$

$$\begin{cases}sx-sy-sy=0,\\ x=\frac{ay}{b};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{ay}{b},\\ \frac{say}{b}-sy-\frac{ay^2}{b}=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{ay}{b},\\ sa-sb=ay,\\ y\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{ay}{b},\\ s(a-b)=ay;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{as(a-b)}{ab}, \\ y = \dfrac{s(a-b)}{a}. \end{cases}$$

Оскільки $x>y$, то $a>b$, $s>0$, $a>0$, $b>0$.

Відповідь. $\dfrac{s(a-b)}{b}$ км/год, $\dfrac{s(a-b)}{a}$ км/год.

3. Два літаки вилетіли одночасно з пунктів A і B назустріч один одному і зустрілися на відстані a км від середини AB. Якби перший літак вилетів на b год пізніше від другого, то вони зустрілися б на середині AB. Якби другий літак вилетів на b год пізніше від першого, то вони зустрілися б на $\frac{1}{4}$ частині шляху від B. Знайти відстань AB і швидкості літаків.

Розв'язання

Нехай t_1 год – час, потрібний літаку, що вилетів із A, щоб подолати відстань AB; t_2 год — час, потрібний другому літаку на подолання відстані AB у напрямі від B до A. За умовою задачі складаємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} \dfrac{t_2}{2} - \dfrac{t_1}{2} = b, \\ \dfrac{3}{4}t_1 - \dfrac{1}{4}t_2 = b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 - t_1 = 2b, \\ 3t_2 - t_2 = 4b. \end{cases}$$

Виконаємо алгебраїчне додавання:

$$\begin{cases} 2t_1 = 6b, \\ t_2 = 2b + t_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = 3b, \\ t_2 = 5b. \end{cases}$$

Далі складаємо рівняння:

$$\left(\frac{AB}{2}+a\right):\left(\frac{AB}{2}-a\right)=\frac{t_2}{t_1},$$

$$\frac{AB+2a}{AB-2a}=\frac{t_2}{t_1}.$$

Оскільки $\frac{t_2}{t_1}=\frac{5}{3}$ то $\frac{AB+2a}{AB-2a}=\frac{5}{3}$,

3(AB+2a)=5(AB-2a),

3AB+6a = 5AB-10a,

AB =8a.

Далі з відношень $\frac{AB}{t_1}$ і $\frac{AB}{t_2}$ знаходимо швидкості літаків.

$\frac{AB}{t_1}=\frac{8a}{3b}$ (км/год) — швидкість першого літака,

$\frac{AB}{t_2}=\frac{8a}{5b}$ (км/год) — швидкість другого літака, а відстань між пунктами *A* і *B* дорівнює 8*a* км.

Відповідь. 8*a* км, $\frac{8a}{3b}$ км/год, $\frac{8a}{5b}$ км/год.

4. Міста *A* і *B* розмішені на прямолінійній трасі на відстані 5 одне від одного. Із *A* в *B* одночасно вийшли два пішоходи, а із *B* в *A* в той самий час виїхав велосипедист. Проїхавши *k*-ту частину шляху від *B* до *A* ($0 < k < 1$), велосипедист зустрів першого пішохода, а потім, проїхавши $\frac{2}{3}$ всього шляху, зустрів другого пішохода. На якій відстані від місця зустрічі другого пішохода і велосипедиста у момент їх зустрічі знаходився перший пішохід? Швидкості пішоходів і велосипедиста сталі.

Розв'язання

Нехай v_1, км/год, v_2 км/год — швидкості першого і другого пішоходів відповідно, v_3 км/год — швидкість велосипедиста, $v_1 > 0$, $v_2>0$, $v_3>0$.

t_1 год — момент часу від початку руху до зустрічі першого пішохода і велосипедиста;

t_2 год — момент часу від початку руху до зустрічі другого пішохода і велосипедиста. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} v_3 t_1 = ks, & (1) \\ v_1 t_1 = (1-k)s, & (2) \\ v_2 t_2 = \dfrac{1}{3}s, & (3) \\ v_3 t_2 = \dfrac{2}{3}s. & (4) \end{cases}$$

Із (1) і (2) рівнянь знаходимо, що

$$v_1 = v_3 \cdot \frac{1-k}{k},$$

з рівняння (4): $t_2 = \dfrac{2s}{3v_3}$.

Нехай x км — шукана відстань, тоді

$x = v_1 t_2 - v_2 t_2$,

$x = v_3 \dfrac{1-k}{k} \cdot \dfrac{2s}{3v_3} - \dfrac{s}{3}$,

$x = \dfrac{s(2-3k)}{3k}$.

Оскільки пішоходи йдуть до пункту B, то одержаний результат матиме зміст, якщо $0 \le x \le \dfrac{2}{3}s$, тобто, якщо виконується нерівність $0 \le \dfrac{s(2-3k)}{3k} \le \dfrac{2}{3}s$.

Ця нерівність справедлива, якщо $\dfrac{2}{3} \ge k \ge \dfrac{2}{k}$

Якщо $0 < k < \dfrac{2}{5}$ відстань між пішоходами в момент часу t_2 дорівнює $\dfrac{2}{3}s$, оскільки до цього часу перший пішохід дійде до кінцевого пункту.

Якщо $k > \dfrac{2}{3}$ то умова задачі не виконується (велосипедист раніше зустріне другого пішохода).

Отже, перший пішохід був на відстані $\dfrac{2s}{3}$км, якщо $k \in \left(0; \dfrac{2}{5}\right)$, $\dfrac{s}{3}\left(\dfrac{2-3k}{k}\right)$, якщо $k \in \left[\dfrac{2}{5}; \dfrac{2}{3}\right]$від зустрічі велосипедиста другого пішохода.

Відповідь. $\frac{2s}{3}$, якщо $k \in \left(0;\frac{2}{5}\right)$, $\frac{s}{3}\left(\frac{2-3k}{k}\right)$, якщо $k \in \left[\frac{2}{5};\frac{2}{3}\right]$

5. Два велосипедисти виїхали одночасно з пункту *A*, їдуть з різними, але сталими швидкостями до пункту *B*, приїхавши, відразу повертаються назад. Перший велосипедист, обігнавши другого, зустрічає його на зворотному шляху на відстані a км від *B*. Потім, прибувши в *A*, знову повертається до *B*, зустрічаючи на шляху другого велосипедиста**,** пройшовши k-ту частину відстані *A* до *B*. Знайти відстань від *A* до *B*.

Розв'язання

До першої зустрічі перший велосипедист проїхав ($s+a$) км, другий — (s-a) км, де s км — відстань від *A* до *B*. До другої зустрічі вони проїхала відповідно $\left(2s+\frac{1}{k}s\right)$ км і $\left(2s-\frac{1}{k}s\right)$ км.

Якщо два матеріальні тіла рухаються зі сталими швидкостями, то відношення швидкостей тіл при рівності витраченого часу дорівнює відношенню пройдених тілами шляхів. Тому для знаходження s маємо рівняння:

$$\frac{s+a}{s-a}=\frac{2+\frac{1}{k}}{2-\frac{1}{k}},$$

звідси $s=2ak$ км, де $a>0$, $k>0$.

Відповідь. $2ak$ км.

6. Із пунктів *A* і *B* назустріч один одному одночасно вирушили пішохід і велосипедист. Після зустрічі пішохід продовжив свій рух до пункту *B*, а велосипедист повернувся назад і також поїхав до пункту *B*. Пішохід прийшов у пункт *B* на t год пізніше велосипедиста. Скільки часу минуло до зустрічі, якщо швидкість пішохода у k разів менша від швидкості велосипедиста?

Розв'язання

Нехай до зустрічі минуло x год. Одну і ту саму відстань від місця зустрічі до пункту B велосипедист подолав за x год, а пішохід за $(x+t)$ год. Оскільки при одній відстані час обернено пропорційний до швидкості, то

$$\frac{x+t}{x}=k,$$

де $x>0$, $t>0$.

$x=\frac{t}{k-1}$, де $к>1$.

Відповідь. $\frac{t}{k-1}$.

7. Для випробування мотоциклів різних моделей два мотоциклісти виїхали одночасно від B до A. Кожний їхав з незмінною швидкістю і, приїхавши до кінцевого пункту, відразу повернули назад. Першого разу вони зустрілися на відстані g км від B, другого разу — на відстані g км від A через t год після першої зустрічі. Знайти відстань між A і B і швидкості обох мотоциклів.

Розв'язання

Нехай x — відстань між пунктами A і B, де $x>0$, v_1, v_2 – швидкості мотоциклів $v_1>0$, $v_2>0$.

За час t перший мотоцикліст проїхав відстань, що дорівнює $p+x$-g , а другий $g+x$-p.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} v_1=\dfrac{x+p-g}{t}, \\ v_2=\dfrac{x+g-p}{t}. \end{cases}$$

З іншого боку, відношення швидкостей дорівнює відношенню відстаней, пройдених до першої зустрічі, тобто:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{x-p}{p}.$$

Підставивши у це рівняння значення v_1 і v_2 із системи, одержуємо рівняння, з якого знаходимо x.

$$\frac{x+p-g}{t}:\frac{x+g-p}{t}=\frac{x-p}{p},$$

$$\frac{x+p-g}{x+g-p}-\frac{x-p}{p}=0,$$

$$\begin{cases}(x+p-g)p-(x-p)(x+g-p)=0,\\ x+g-p\neq 0,\\ p\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}xp+p^2-gp-(x^2-xp+gx-gp-px+p^2)=0,\\ x\neq p-g,\\ p\neq 0;\end{cases}$$

$$px^2+p^2-gp-x^2+2px-gx+gp-p^2=0,$$

$$-x^2+3px-gx=0,$$

$$x^2-3px+gx=0,$$

$$x(x-3p+g)=0,$$

$$x\neq 0;$$

$$x-3p+g=0,$$

$$x=3p-g.$$

Тоді $v_1=\dfrac{3p-g+p+g}{t}=\dfrac{4p-2g}{t}$, $v_2=\dfrac{3p-g+g-p}{t}=\dfrac{2p}{t}$.

Отже, відстань між A і B дорівнює $3p-g$, а швидкості мотоциклів $\dfrac{4p-2g}{t}$ і $\dfrac{2p}{t}$.

Відповідь. $(3p-g)$ км, $\dfrac{4p-2g}{t}$ км/год, $\dfrac{2p}{t}$ км/год.

8. Літак вилетів від A до B по прямій. Через деякий час внаслідок зустрічного вітру він зменшив швидкість до v км/год, тому запізнився на t_1, хв. Під час другого рейсу літак з тієї самої причини зменшив свою швидкість до тієї самої величини, але на d км далі від A, ніж першого разу, і запізнився на t_2 хв. Знайти початкову швидкість літака.

Розв'язання

Нехай x км/год — початкова швидкість літака. Різниця між часом спізнення літака у першому і другому рейсах дорівнює $\dfrac{t_1-t_2}{60}$ год і пов'язана з тим, що шлях довжиною d км був пройдений з різними швидкостями: під час першого рейсу швидкість була v км/год, під час другого — x км/год (на решті шляху швидкості були однаковими).

Одержуємо рівняння:

$$\frac{t_1 - t_2}{60} = \frac{d}{v} - \frac{d}{x}.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно x:

$$\begin{cases} (t_1 - t_2)vx - 60dx + 60dv = 0, \\ vx \neq 0, x > 0, \quad v > 0, \quad t_1 > 0, \quad t_2 > 0, \quad d > 0. \end{cases}$$

$x((t_1\text{-}t_2)v\text{-}60d)=\text{-}60dv,$

$$x = \frac{60vd}{60d + v(t_2 - t_1)}.$$

Оскільки значення всіх параметрів додатні, то $t_2 > t_1$.

Відповідь. $\frac{60vd}{60d + v(t_2 - t_1)}$. км/год.

9. По колу у протилежних напрямах рухаються два тіла: перше рівномірно з лінійною швидкістю v, а друге — рівноприскорено з лінійною швидкістю a. У початковий момент часу обидва тіла були в точці A і швидкість другого дорівнювала нулю. Через скільки часу відбудеться перша зустріч цих тіл, якщо друга зустріч буде знову у точці A?

Розв'язання

Позначимо через t час, що минув до першої зустрічі, через t' — час, що минув до другої зустрічі, і через R — радіус кола. За час t перше тіло пройшло шлях vt, а друге — $\frac{at^2}{2}$.

Сума цих відстаней дорівнює довжині кола:

$$vt + \frac{at^2}{2} = 2\pi R.$$

За час t' кожне тіло пройшло однакову відстань, що дорівнює довжині кола:

$$vt' = 2\pi R, \quad \frac{a(t')^2}{2} = 2\pi R.$$

Виключаючи звідси t', знаходимо $R = \dfrac{v^2}{\pi a}$.

Підставивши це значення R у перше рівняння, одержуємо квадратне рівняння відносно t.

$$\frac{at^2}{2} + vt - \frac{2v^2}{a} = 0.$$

$$\begin{cases} a^2t^2 + 2avt - 4v^2 = 0, \\ a \neq 0. \end{cases}$$

$$D = 4a^2v^2 + 16a^2v^2 = 20a^2v^2 > 0,$$

$$t_1 = \frac{-2av - \sqrt{20a^2v^2}}{2a^2} = \frac{-2av - 2av\sqrt{5}}{2a^2} = \frac{-2av(1+\sqrt{5})}{2a^2} = -(\sqrt{5}+1)\frac{v}{a}.$$

Оскільки $v>0$, а > 0, то $t_1 <0$, тому t_1 не задовольняє умову задачі.

$$t_2 = -(\sqrt{5}-1)\frac{v}{a} > 0.$$

Отже, $(\sqrt{5}-1)\dfrac{v}{a}$ — час, через який відбудеться перша зустріч.

Відповідь. $(\sqrt{5}-1)\dfrac{v}{a}$.

10. По колу радіуса R рівномірно в одному напрані рухаються дві точки. Одна з них робить повний оберт на t с швидше від другої. Час між двома послідовними зустрічами точок дорівнює T. Визначити швидкості цих точок.

Розв'язання

Нехай x м/с, y м/с — швидкості точок, причому $x>y$, $x>0$, $y>0$.

Складаємо перше рівняння:

$$\frac{2\pi R}{y} - \frac{2\pi R}{x} = t.$$

За умовою задачі час T точка, що рухається з більшою швидкістю, пройде по колу відстань на $2\pi R$ більшу, ніж друга точка. Виходячи з цього, складаємо друге рівняння:

$$Tx - Ty = 2\pi R.$$

Маємо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi R}{y} - \dfrac{2\pi R}{x} = t, \\ Tx - Ty = 2\pi R; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - \dfrac{2\pi R}{T}, \\ x^2 - \dfrac{2\pi R}{T}x - \dfrac{2\pi R}{T} \cdot \dfrac{2\pi R}{t} = 0, \\ T \neq 0. \end{cases}$$

Виписуємо друге рівняння системи і розв'язуємо його:

$$x^2 - \frac{2\pi R}{T}x - \frac{2\pi R}{T} \cdot \frac{2\pi R}{t} = 0.$$

$$D = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} + 16\frac{\pi^2 R^2}{Tt} = \frac{4\pi^2 R^2 t + 16\pi^2 R^2 T}{T^2 t} > 0,$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^2 (t + 4T)}{T^2 t}} = \frac{2\pi r}{T}\sqrt{1 + \frac{4T}{t}},$$

$$x_1 = \left(\frac{2\pi R}{T} - \frac{2\pi R}{T}\sqrt{1 + \frac{4T}{t}} \right) : 2 = \frac{\pi R}{T}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4T}{t}} \right),$$

оскільки $\sqrt{1 + \frac{4T}{t}} > 1$, то $x_1 < 0$ — не задовольняє умову задачі.

$$x_2 = \frac{\pi R}{T}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4T}{t}} \right).$$

Знайдемо значення y, що відповідає значенню x_2:

$$y = \frac{\pi R}{T}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4T}{t}} \right) - \frac{2\pi R}{T} = \frac{\pi R}{T}\left(\sqrt{1 + \frac{4T}{t}} - 1 \right).$$

Відповідь. $\frac{\pi R}{T}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4T}{t}} \right)$ м/с, $\frac{\pi R}{T}\left(\sqrt{1 + \frac{4T}{t}} - 1 \right)$. м/с.

11. Троє мандрівників *A, B* і *C* переправлялися через водосховище шириною *s* км: *A* — плив зі швидкістю *v* км/год, а *B* і *C*— використали моторний човен, швидкість якого v_1 км/год. Через деякий час після початку переправи *C* вирішив решту шляху пливти самостійно з тією самою швидкістю, що і *A*, *B* тим часом повернув назад, щоб узяти з собою *A*. *A* сів у човен і продовжив шлях разом з *B*. До

протилежного берега всі троє припливли одночасно. Визначити, скільки часу тривала переправа.

Розв'язання

Нехай x — відстань від першого берега до того місця, де C залишив човен. Зауважимо, що на цій самій відстані від другого берега A сів у човен. Способи, якими подолали переправу A і C, відрізняються лише тим, що C спочатку плив на човні, а потім самостійно, а A — навпаки. Оскільки вони пливли з рівними швидкостями v, причому $v \neq v_1$, і витратили один і той самий час на переправу, то зазначені відстані повинні бути рівними. Тому можна скласти рівняння, позначивши через s відстань від місця, де C залишив човен, до другого берега.

$$\frac{x+s-2(s-x)}{v_1} = \frac{s-x}{v}$$

У цьому рівнянні ліва частина виражає час, витрачений човном на подолання відстані до зустрічі з A, а права частина — час, що витратив A до зустрічі з човном.

Розв'яжемо рівняння відносно x:

$$(x+s-2s+2x)v-(s-x)v_1=0$$

де x, s, v, v_1 —додатні величини.

$xv+sv-2sv+2xv-sv_1+v_1x=0,$

$3vx+v_1x=sv+sv_1,$

$x=\dfrac{s(v+v_1)}{3v+v_1}$ відстань від початку переправи до місця, де C залишив човен.

Нехай T — час, протягом якого тривала переправа, тоді

$$T=\frac{s-x}{v}+\frac{s}{v_1}.$$

Підставивши значення $x=\dfrac{s(v+v_1)}{3v+v_1}$ у цей вираз, одержуємо:

$$T=\frac{s(v+3v_1)}{v_1(3v+v_1)}.$$

Відповідь. $\dfrac{s(v+3v_1)}{v_1(3v+v_1)}$ год.

12. Відстань між двома містами дорівнює a км. З цих міст назустріч один одному виїхали два автомобілі і зустрілися через $2t$ год. Якби перший автомобіль виїхав на t год раніше, ніж другий, то вони зустрілися б на середині шляху. Визначити швидкість кожного автомобіля.

Розв'язання

Нехай швидкість першого автомобіля x км/год, а другого y км/год ($x>0, y>0$).

Тоді перший проїде половину шляху за $\frac{a}{2x}$ год, а другий — за $\frac{a}{2y}$ год.

За умовою задачі

$$\frac{a}{2x} - \frac{a}{2y} = t.$$

Якщо автомобілі виїжджають одночасно, то весь шлях вони проїдуть за $\frac{a}{x+y} = 2t$ год.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{a}{2x} - \frac{a}{2y} = t, \\ x + y = \frac{a}{2t} \\ x > 0, y > 0, a > 0, \quad x > y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(y - x) = 2xyt, \\ x + y = \frac{a}{2t}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ay - ax = 2xyt, \\ ax + ay = \frac{a^2}{2t}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ay = 2xyt + \frac{a^2}{2t}, \\ x = \frac{a}{2t} - y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ay = 2\left(\frac{a}{2t} - y\right)yt + \frac{a^2}{2t}, \\ x = \frac{a}{2t} - y. \end{cases}$$

Виписуємо перше рівняння системи і розв'язуємо його.

$$2ay = ay - 2ty^2 + \frac{a^2}{2t},$$

$$2ty^2 + ay - \frac{a^2}{2t} = 0,$$

$$D = a^2 + 4a^2 = 5a^2.$$

$y_1 = \frac{-a - a\sqrt{5}}{4t} < 0$ — не задовольняє умову, $y_2 = \frac{a\sqrt{5} - a}{4t}$.

Знайдемо відповідне значення x:

$$x = \frac{a}{2t} - \frac{a - a\sqrt{5}}{4t} = \frac{2a - a + a\sqrt{5}}{4t} = \frac{a + a\sqrt{5}}{4t},$$

Причому $\frac{a + a\sqrt{5}}{4t} > \frac{a\sqrt{5} - a}{4t}$ що відповідає умові

Відповідь. $\frac{a(\sqrt{5}+1)}{4t}$ км/год, $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{4t}$ км/год.

13. Два автомобілі виїжджають одночасно з пункту *A* до пункту *B*, відстань між якими дорівнює *p* км. Швидкість одного автомобіля на *m* км/год більша за швидкість другого, тому він приїжджає до *B* на *h* год раніше. Визначити швидкості автомобілів.

Розв'язання

Нехай швидкість першого автомобіля *x* км/год, тоді швидкість другого автомобіля (*x* + *m*) км/год.

Перший автомобіль проїжджає *p* км за $\frac{p}{x}$ — год, а другий за $\frac{p}{x+m}$ год.

Складаємо рівняння:

$$\frac{p}{x} - \frac{p}{x+m} = t,$$

де $x>0,\ t>0,\ m>0,\ p>5.$

$p(x+m)-px-tx(x+m)=0,$

$px+mp-px-tx^2-tmx=0,$

$-tx^2-tmx+pm=0,$

$x^2+mx-\frac{pm}{t}=0.$

$D = m^2 + \frac{4pm}{t} > 0,$

$x_1 = -\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{pm}{t}} < 0$ — не задовольняє умову задачі.

$x_2 = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{pm}{t}}$ — швидкість першого автомобіля, а швидкість другого $\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{pm}{t}}$.

Відповідь. $-\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{pm}{t}}$ км/год, $\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{pm}{t}}$ км/год.

В И С Н О В К И

Звичайно, така систематика умовна, оскільки, наприклад, задачі фізичного змісту можна класифікувати здебільшого як задачі «на рух», а задачі алгебраїчного змісту як задачі на залежність між компонентами арифметичних дій». На практиці часто зустрічаються задачі змішаних типів.

Матеріал статті допоможе старшокласникам у підготовці до незалежного зовнішнього оцінювання з математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Горделадзе. Ш.Г., Кухарчук М.М. Збірник конкурсних задач з математики – Вища школа, 1990.
2. Дыбов П.Т., Забоев А.И. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Учебное пособие – Высшая школа, 1989.
3. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. Просвещение, 1990.
4. Колесникова Л.В., Коротіна Г.Й. Алгебра. Дидактичні матеріали. 9 клас: Навчальний посібник. – Х.: Світ дитинства, 2001.
5. Сєров М.І., Самоздран А.О. Посібник з елементарної математики – Полтава, 2005.