Рівненський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
Кафедра природничо-математичної освіти

Методика використання прикладних задач у шкільному курсі математики

Методичний посібник

Рівне -2018

УДК 37.016:511-32

Методика використання прикладних задач у шкільному курсі математики. Методичний посібник. /уклад. А.П.Королюк. – Рівне: РОІППО, 2018. – 30 с.

Рецензенти:

Харченко Наталія Борисівна, кандидат педагогічних наук, доцент, в.о. завідувача кафедри природничо-математичної освіти Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти

Пекарська Лариса Володимирівна, вчитель математики КЗ Школа - інтернат ІІ - ІІІ ступенів « Рівненський обласний ліцей» Рівненської обласної ради

Посібник містить як теоретичні відомості, так і конкретні практичні матеріали, що дають можливість реалізувати прикладну спрямованість математики для різних профілів навчання Адресується вчителям математики загальноосвітніх навчальних закладів.

Затверджено НМР РОІППО до використання *(протокол №__5__ від _22.05.2018 р.)*

Зміст

Вступ

Сучасний етап розвитку освіти України характеризується активним впровадженням компетентністного підходу до навчання, що сприяє інтеграції України в Європейський освітній простір. Якщо загальні теоретичні питання компетентністного підходу розроблені досить ґрунтовно (О.В. Овчарук, О.І. Пометун, О.Я. Савченко, А.В. Хуторський та ін.), то реалізація його при вивченні математики тільки починає розроблятися (С.А. Раков). Тому актуальною є проблема реалізації компетентнісного підходу при вивченні різних розділів математики. Одним із засобів формування в учнів математичних компетентностей є використання прикладних задач . Прикладні задачі відсутні (чи майже відсутні) у більшості підручників для старшої школи, хоча важливість їх використання у курсі алгебри та початків аналізу показана у роботі Л.О. Соколенко [11].

Україна є учасником програми PISA - 2018. Міжнародні порівняльні дослідження стали невід'ємною частиною системи оцінювання якості освіти в багатьох країнах світу У межах цієї Програми підлітки проходять тестування з математики, природничих наук і читання, а також відповідають на запитання під час анкетувань. Дослідження має на меті визначити, наскільки учень зможе використовувати знання й уміння, отримані в школі, за можливих життєвих труднощів і викликів, протистояти яким ці знання й уміння зможуть допомогти. Отже, PISA має на меті визначити, наскільки в учнів розвинена здатність до використання знань і умінь з математики у подоланні різноманітних життєвих викликів і проблем, пов'язаних із математикою.

Серед напрямків, які можуть поліпшити рівень і якість шкільної математичної освіти, є підсилення її практичного, прикладного та політехнічного спрямування.

Практичне спрямування шкільного курсу математики передбачає вироблення в учнів умінь використовувати здобуті знання під час вивчення навчальних предметів, застосовувати раціональні обчислювальні прийоми, розв’язувати рівняння і нерівності, використовувати ІКТ.

Прикладне спрямування включає уміння учнів математично досліджувати реальні явища, складати математичні моделі задач, розв’язувати їх та зіставляти знайдені результати з реальними.

Політехнічне спрямування передбачає використання математичних знань та вмінь для пояснення виробничих циклів, процесів обслуговування та керування, полегшення вивчення інших предметів, зокрема фізики, хімії, креслення.

Розділ 1

1.1. Прикладні задачі як засіб формування ключових компетентностей учнів

Математика розвивається в основному через розв’язування задач. Задачі стимулювали не тільки виникнення, а й подальший розвиток математичної науки. Основну роль, звичайно, відігравали задачі, поставлені життям.

Здатність учнів застосовувати знання в конкретних ситуаціях не з’являється стихійно, вона формується в процесі доцільного педагогічного впливу, що забезпечує здобування школярами таких знань, на які вони зможуть широко спиратися в трудовій і суспільній діяльності. Ідеться про реалізацію прикладної спрямованості шкільного курсу математики. Численні науково-методичні публікації свідчать про важливість цього напрямку у навчанні математики в школі.

Однією з форм утвердження ключових компетентностей є продуктивне застосування в навчальному процесі задач практичного та прикладного характеру, до розв’язання яких учні мають більше бажання, ніж до іншого матеріалу шкільних джерел. Одним із засобів вирішення цих завдань є продумане використання на уроках математики задач практичного змісту, до розв'язання яких, як показує досвід роботи, учні мають більший потяг, ніж до більшості задач із шкільних підручників. В Г. Болтянський писав, що «задачі прикладного характеру мають у загальноосвітній школі важливе значення перш за все для виховання в учнів інтересу до математики. На прикладі добре складених задач прикладного змісту учні будуть переконуватись у значенні математики для різноманітних сфер людської діяльності, в її користі і необхідності для практичної роботи, побачать широту можливих застосувань математики, зрозуміють її роль в сучасній культурі» [13].

Одним із дієвих та ефективних засобів реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є використання в навчальному процесі ***прикладних задач***, які виникли в інших галузях, але потребують математичного розв'язання.

У методичній літературі подано різні означення прикладної задачі: деякі вчені прикладною називають задачу, яка потребує перекладу на математичну мову; інші вважають, що прикладна задача за формулюванням і методом розв'язування повинна бути близькою до задач, що виникають на практиці. Прикладні задачі – це задачі, зміст яких розкриває застосування математики у суміжних дисциплінах, знайомить з її використанням в організації, технології та економіці сучасного виробництва, у побуті та сфері обслуговування, при виконанні трудових операцій. У цих задачах задаються реальні умови та розглядаються реальні ситуації, що відбуваються на практиці.

Прикладними називаємо задачі, які виникають за межами математики, але розв'язування яких вимагає застосування математичного апарату. Прикладною задачею практичного характеру називатимемо задачу, розв'язування якої передбачає використання реального предмета (його виготовленої моделі), потребує проведення геометричного експерименту, відповідних вимірювальних робіт тощо. Прикладною задачею теоретичного характеру назвемо задачу, якщо її розв'язування не пов'язане з роботою із реальним предметом або його виготовленою моделлю. Також, залежно від вимоги, поряд із прикладними задачами на обчислення, побудову виділено якісні прикладні задачі. Це задачі із вимогою пояснити, дослідити або обґрунтувати певний факт або положення дійсності із можливим, але необов'язковим виконанням обчислень, побудов тощо. Цінність таких задач, у нескладних обчисленнях, у тому, що вони дозволяють зосередитись учням на ясному та точному з'ясуванні геометричної суті аксіом, постулатів, теорем, понять та уявлень; формують в учнів геометричне мислення та інтуїцію, розуміння процесу математичного моделювання.

Сформулюємо основні вимоги до прикладних задач, які використовуються у навчанні математики:

- Задачі повинні мати реальний практичний зміст, який забезпечує ілюстрацію практичної цінності і значущості набутих математичних знань.
- Задачі повинні відповідати шкільним програмам і підручникам за формулюванням і змістом методів і фактів, які будуть використовувати в процесі їх розв'язування.
- Задачі повинні бути сформульовані доступною і зрозумілою мовою, не містити термінів, з якими учні не зустрічалися і які вимагатимуть додаткових пояснень.
- Числові дані в прикладних задачах повинні бути реальними, відповідати існуючим у практиці.
- У змісті задачі, по можливості, повинен бути відображений особистий досвід учнів, місцевий матеріал, який дозволяє ефективно показати використання математичних знань і викликати в учнів пізнавальний інтерес.
- Прикладні задачі повинні відображати ситуації промислового і сільськогосподарського виробництва, економіки, торгівлі, екології, ілюструвати застосування математичних знань у конкретних професіях людей. Враховуючи політичну ситуацію в країні, варто особливу увагу приділити задачам патріотичного змісту, що може бути забезпеченням реалізації виховної мети на уроках математики.

  При розв'язанні прикладних задач у класах з поглибленим вивченням математики їх формулювання може бути розширене і становити собою деяке теоретичне зведення до проблеми, що вивчається. Сама проблема може мати багатоступеневе розв'язання, при якому кожний наступний етап розвиває й доповнює попередній .

  Прикладні задачі розрізняють, орієнтуючись на три групи спеціальностей: техніко-технологічні (промисловість, зв'язок, транспорт, будівництво, сільське господарство тощо); гуманітарні (освіта, культура, право, медицина, мистецтво тощо); економічні (фінанси, побут, грошові операції, торгівля тощо)

1.2 Модель і математичне моделювання

Моделювання – це метод наукового пізнання, що полягає у вивченні не певного об’єкта, а його замінника, що відповідає об’єкту.

Для розв’язання прикладної задачі математичними методами спочатку необхідно створити її математичну модель. Моделлю називають спеціально створений об’єкт, який відображає властивості досліджуваного об’єкта. **Математичні моделі** створюють із математичних понять і відношень: геометричних фігур, чисел, виразів (рівнянь, нерівностей та їх систем) тощо.

Розв’язування прикладних задач математичними методами здійснюється в **три етапи:**

1. створення математичної моделі даної задачі;
2. розв’язування цієї математичної задачі;
3. аналіз відповіді.

Отже, **модель** – це такий матеріальний або уявний об’єкт, який у процесі дослідження заміщує об’єкт-оригінал. [12]

Процес побудови, вивчення та застосування моделей називають **моделюванням**. Необхідність використання методу моделювання визначається тим, що багато об’єктів неможливо безпосередньо досліджувати, або ж це дослідження потребує багато часу і засобів.

Можна виділити три допоміжні етапи у розв’язуванні задачі:

1. формалізація – перехід від реальності до побудови формальної моделі;
2. розв’язування задачі всередині побудованої моделі – успішне виконання цього етапу залежить від правильно обраного методу розв’язування та залучення допоміжного математичного апарату;
3. інтерпретація – переклад одержаного результату на мову вихідної задачі.

Етапи моделювання можуть бути розглянуті як необхідні компоненти складної діяльності з моделювання, як її окремі дії.

Складові діяльності з моделювання (за Н. Г. Салміною) такі:

1. попередній аналіз;

2. переклад реальності або тексту, який описує реальність, на знаково-символьну мову;
3. робота з моделлю;
4. співвіднесення результатів, отриманих у межах математичної моделі, з реальністю.

Кожен компонент діяльності з моделювання має свій зміст зі своїм складом операцій і спеціальними засобами, що виступають предметом засвоєння. Попередній аналіз включає такі операції: семантичний аналіз (на рівні окремих понять; на рівні окремих речень; перефразування речень); осмислення тексту в цілому; відновлення предметної ситуації, що стоїть за ним; виділення кількісних характеристик. Переклад реальності або тексту, який описує реальність, на знаково-символьну мову потребує знання відповідних правил. Робота з моделлю передбачає аналіз та перетворення моделі. Співвіднесення результатів, отриманих у межах математичної моделі, із реальністю передбачає не лише виявлення правильності відповіді, але й відповідності отриманих даних дійсності. Важливо, що моделювання передбачає оволодіння такими операціями, як розділення планів, виділення правил, Володіння принципами перекладу тексту, що описує реаліст, на знаково-символьну мову, вміння перетворювати. [9]

При математичному моделюванні відсторонюються від якісної різнорідності моделі та об’єкта, від належності їх до різних форм руху матерії. Це узагальнення приймає форму теорії ізоморфізму систем, що набуває характеру математичної подібності.

Суть цієї подібності пояснюється тотожністю математичної форми законів природи, що конкретно виражається: фізичні закони математично подібних систем різні, але математична форма їх прояву одна і та (Рис. 1)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Інженер-електрик скаже:
«Це рівняння напруги або струму в електричному ланцюгу з активним опором»

Інженер-будівельник скаже:
«Це рівняння, яке з'єднує сили і деформації якоїсь конструкції»

Інженер-механік скаже:
«Це рівняння рівноваги сил системи ричагів або пружин»

Інженер-плановик скаже:
«Це рівняння для розрахунку загрузки станків»

Математик скаже: «*Це система двох лінійних рівнянь з двома невідомими*»

☺

Універсальність математичного моделювання проявляється у тому, що до складу математичного моделювання, як виду діяльності, входять майже всі основні загально пізнавальні (аналіз, узагальнення, інтерпретація та інші) та предметні (порівняння, знаково-символьна діяльність, обчислення та інші) види та прийоми діяльності прикладного характеру.

Найважчою зі змістовних ліній у сприйнятті учнями є вміння розв'язувати текстові задачі. Звичайно треба навчати учнів застосуванню метода математичного моделювання. На кожному уроці необхідно звертати увагу учнів, що всі задачі на уроках математики взяті із нашого життя. А вміти перекласти задачу на математичну мову, «читати» формули – є одним із основних завдань математики.

Наприклад:

План розбору задачі

1. Назвати об'єкти, інформація щодо яких змінюється.
2. Як пов'язані між собою ці об'єкти? (назвати щонайменше два зв'язки).
3. Що треба знайти у задачі?

4. Із виділених умов (зв'язків) в задачі обрати ту, що будемо використовувати для складання рівняння?

5. Що приймемо за невідоме? Рекомендація: за невідоме прийняти найменший із об'єктів або той, що пов'язаний найкраще зі всіма іншими об'єктами.

Умова (зв'язка) може бути явною, а може бути і закритою. Але при ґрунтовних знаннях матеріалу з математики та інших предметів, або при достатньому життєвому досвіді, вона стає можливою для використання.

Схема написання оповідання про складання рівняння:

1. Прийняти за невідоме інформацію про обраний об'єкт.
2. Записати інформацію про інші об'єкти, використовуючи зв'язки, виділені з умови задачі.
3. Вказати умову, яка буде використана для складання рівняння, і порівняти її з інформацією з умови задачі.
4. Скласти рівняння та розв'язати його.

Розділ II
2.1. Методичні рекомендації щодо використання прикладних задач

Аналіз прикладних задач, які зустрічаються у шкільних підручниках та посібниках , дозволяє зробити такі висновки.

1. Майже всі існуючі збірники потребують модернізації. Це стосується системи мір, застарілих термінів, кількісних та якісних характеристик різних технічних процесів і виробництва, неактуального сюжету деяких задач тощо.

2. Характерним є переважання виробничої тематики у задачах, зокрема пере обтяжливість технічною термінологією.

3. Існує значна кількість задач, які повторюються у збірниках. Незмінною залишається і фабула задач. Так, переважають задачі на обчислення об'єму кімнати, кількості шпалер для оклеювання приміщення, маси цеглини для тієї чи іншої будівлі, кількості фарби для стін, маси сіна в скирті, об'єму води в діжці тощо. Часто старому змісту надають нове «забарвлення», за якого не виникає задачі нової якості, і зближення з життям носить надуманий характер.

4. Більшість задач пов'язана лише з круглими тілами та многогранниками.

5. Гендерний аналіз прикладних задач, які містяться у збірниках, показує, що переважна більшість задач розрахована на інтереси юнаків, а не дівчат(переважає виробнича, будівельна тематика). Не вистачає прикладних задач з економічної, фінансової, екологічної, технологічної, дизайнерської, кулінарної, побутової тематики тощо.

6. Найчастіше прикладні задачі розподілено за такими категоріями:

- *за типами моделей*, що використовуються;
- *за сюжетом* (задачі з повсякденного життя, техніки і сільського господарства, географії, фізики та живої природи тощо):

- *за формою використання* прикладних задач на уроці (підготовчі, на застосування окремої теореми, на закріплення певного поняття, контролюючі тощо);
- *за кількістю та формою даних* в умові задачі (із зайвими, недостатніми або суперечливими даними, без числових даних);
- *залежно від вимоги* (обчислити. Виготовити, пояснити тощо);
- *за складністю* (прості та складні);
- *залежно від характеру умови задачі* (задачі, у яких ідеться про реальну життєву ситуацію, та задачі потенціального характеру);
- *залежно від представленості етапів розв'язування* (задачі, що формують вміння будувати математичну модель, інтерпретувати отриманий результат тощо).

7. Прикладні задачі практично відсутні серед задач, що рекомендовані для оцінювання навчальних досягнень учнів. [9]

Прикладні задачі потребують особливої уваги з боку вчителя, тому що спочатку їх потрібно сформулювати мовою математики, тобто скласти математичну модель задачі. Це найбільш складна (і тому найбільш цінна для учнів) частина роботи. Для її виконання вчителю слід уважно підійти до кожної конкретної задачі: підготувати ряд евристичних запитань, що спрямують учнів до конкретного навчального матеріалу; визначити суттєві та абстрагуватися від несуттєвих властивостей об'єкта; сформулювати умову та вимогу прикладної задачі мовою математики.

Для розв'язання прикладних задач, як правило, потрібні деякі довідкові дані. Доцільно не включати ці дані в текст задачі, даючи в такий спосіб учням можливість відчути, що даних задачі недостатньо для її розв'язання, зрозуміти, яких саме даних не вистачає, і за можливості змусити їх самих відшукати ці дані в довіднику. Це також потребує особливої підготовки і вчителя, і учнів.

На таких заняттях підвищується активність учнів, а в результаті покращується якість запам’ятовування і відтворення досліджуваного матеріалу, оскільки учні не тільки сприймають матеріал від учителя, а й самі беруть активну участь у його створенні та засвоєнні шляхом поєднання розумових операцій з практичними діями. Розв’язування прикладних задач сприяє розвитку творчої самостійності, ініціативи учнів, дозволяє краще реалізувати принцип зв’язку теорії з практикою.

На жаль, на уроках нерідко бракує часу для розв’язування таких задач, тому можна пропонувати учням прикладні задачі на заняттях гуртка. Причому не обов’язково заняття гуртка повністю присвячувати розв’язуванню прикладних задач. Досить виділити декілька хвилин, для того щоб розглянути задачі практичного змісту з тієї теми, яку в цей час згідно з програмою вивчають на уроках.

Крім того, задачі практичного змісту можливо розв’язувати під час літньої навчальної практики. Це сприяє переконанню учнів у прикладній спрямованості математики, показує зв’язок математики з життям.

2.2. Прикладні задачі для різних напрямів профілізації

Завдання вчителя математики зацікавити учнів математикою. Яким чином цього можна досягти? Показати її значущість для конкретного учня. Тому вчитель має подбати, щоб в його методичній скарбничці була вивірена та продумана система прикладних задач, метою якої є різноплановість, збудження інтересу, ілюстрація застосування математики в житті з урахуванням профілю навчання.

Наведемо добірку прикладних задач, розв'язування яких сприятиме усвідомленню учнями ролі похідної функції та визначеного інтеграла у процесі математичного моделювання певних реальних явищ і процесів. Ці задачі умовно поділено між трьома напрямами профілізації (природничо-математичним, технологічним і суспільно-гуманітарним), учні яких обрали для себе в майбутньому ті напрями діяльності, в котрих математика або є основою майбутньої професійної діяльності, або відіграє роль апарату, специфічного засобу для вивчення й аналізу закономірностей у певній сфері діяльності. Залежно від дидактичних цілей, що ставляться вчителем і часу, що відводиться на вивчення похідної та визначеного інтеграла в класах різних напрямів профілізації, прикладні задачі можна використовувати на різних етапах уроку, наприклад, під час введення нових понять і самостійної роботи учнів.

2.2.1. Природничо-математичний напрям

Задача 1. Капітал у 1 млрд. грош. одиниць може бути розміщено у банку під 50% річних або інвестований у підприємство, при цьому ефективність вкладу очікується у розмірі 100%, а витрати задані квадратичною залежністю. На прибуток накладається податок в p %. При яких значеннях p вклад в підприємство є більш ефективним, ніж чисте розміщення капіталу у банку?

Розв'язання. Нехай x (млрд. грош. одиниць) інвестується в підприємство, а (1 – x) розміщується під відсотки. Тоді розміщений капітал через рік дорівнюватиме $(1-x)\left(1+\frac{50}{100}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x,$ а капітал, вкладений в підприємство, визначимо за формулою $x\left(1+\frac{100}{100}\right)=2x.$ Витрати будуть складати $ax^2,$ оскільки за умовою вони задаються квадратичною залежністю, тобто прибуток від вкладу в підприємство $c=2x-ax^2.$ Податки складають $\left(2x-ax^2\right)\frac{p}{100},$ тобто чистий прибуток буде дорівнювати $\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(2x-ax^2\right).$ Загальна сума через рік складатиме $A(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x+\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(2x-ax^2\right)=\frac{3}{2}+\left[2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}\right]x-\,-a\left(1-\frac{p}{100}\right)x^2.$ Відповідно наша економічна задача зводиться до математичної задачі знаходження максимального значення цієї функції на відрізку [0, 1].

Маємо $A'(x)=2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}-2a\left(1-\frac{p}{100}\right)x.$

$A'(x)=0$ при $x_0=\frac{2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}}{2a\left(1-\frac{p}{100}\right)};$ $A'(x)=-2a\left(1-\frac{p}{100}\right)<0,$ тобто x_0 – точка максимуму. Щоб $x_0\in[0,1],$ необхідно виконати умову $0<2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}<1$ або $p<25.$ Таким чином, якщо $p<25,$ то вигідніше нічого не вкладати у підприємство та розмістити весь капітал у банку. Якщо $p<25,$ то можна показати, що при $x=x_0$

$$A(x_0)=\frac{3}{2}+\frac{\left[2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}\right]^2}{4a\left(1-\frac{p}{100}\right)}>\frac{3}{2}=A(0),$$

тобто вклад в підприємство є вигіднішим ніж чисте розміщення під відсотки.

Задача 2. Прибуток від реалізації товару за ціною p складає: $U(p)=pd(p)=pe^{-2p^2}$ (грошових одиниць), де $d(p)=e^{-2p^2}\ (p\ge 0)$. Чи вигідне подальше підвищення ціни?

Розв’язання. Знайдемо похідну і простежимо за поведінкою функції. Похідна цієї функції: $U'(p)=e^{-2p^2}(1-4p^2)$ додатня, якщо $p<\frac{1}{2}$ і від’ємна, якщо $p>\frac{1}{2}.$ Це означає, що із зростанням ціни виручка спочатку збільшується (не дивлячись на падіння попиту) і при $p=\frac{1}{2}$ досягає максимального значення $U_{\max}=U\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\approx 0,3.$ Тобто, подальше збільшення ціни не має сенсу, оскільки воно веде до скорочення виручки.

Задача 3. Обчислити силу струму I, котра несе на собі заряд, заданий залежністю $q=qm\cos\omega_0 t$ (Кл) через поперечний переріз провідника.

Розв'язання. Розглянемо приріст заряду на маленькому відрізку [t; t+Δt], тоді $\Delta q=I(t)\Delta t.$ $\Delta q/\Delta t=I(t).$ Якщо $\Delta t\to 0,$ то $\lim\frac{\Delta q}{\Delta t}=q'(t)$, тобто $I(t)=q'(t).$ Отже, $I=q'=-qm\omega_0\sin\omega_0 t.$

Задача 4. Крива попиту задана виразом $P=20-0,001D-0,01\sqrt{D}$, де D – об'єм продажу; P – вартість товару в умовних одиницях. Об'єм продажу складає 10000. Визначте, яким чином повинна бути змінена вартість товару, щоб об'єм продажу виріс на 1 %.

Розв'язання. Визначимо вартість $P_0,$ яка відповідає об'єму продажу $D=10000:$ $P_0=20-0,001\cdot 10000-0,01\cdot 100=9\quad (у.о.).$ Для оцінки зміни вартості товару скористаємося формулою наближених обчислень $P\approx P_0+P'\Delta D.$ За умовою задачі ΔD складає 1% від 10000 або $\frac{10000}{100}=100.$ Знайдемо значення $P'(10000):$

$$P'(D)=-0,001-\frac{0,01}{2\sqrt{D}},\ P'(10000)=-0,001-\frac{0,01}{2\cdot 100}=-0,00105.$$

Тоді $P\approx 9-0,00105\cdot 100=8,895(у.о.).$ Таким чином, для збільшення об'єму продажу на 1% вартість товару повинна бути знижена приблизно на 0,105 у.о.

Задача 5. Розмір популяції комах у момент часу t (в днях) задається формулою $p(t)=10^5-\frac{9\cdot 10^4}{t+1}.$ Знайдіть швидкість зростання популяції у момент $t=5$ днів.

Розв’язання. Швидкість зростання популяції є похідною від чисельності популяції, тобто $v(t)=p'(t).$ Отже, $v(t)=\frac{9\cdot 10^4}{(t+1)^2}$ – швидкість приросту популяції комах в момент часу $t.$ Тому, якщо $t=5$ днів, то $v(5)=\frac{9\cdot 10^4}{(5+1)^2}=\frac{10^4}{4}=2500.$

Задача 6. При якій кислотності сума гідроген-іонів H^+ і гідроксид-іонів OH^- в одиниці об’єму води буде найменшою?

Розв’язання. Введемо позначення: x – концентрація гідроген-іонів H^+, y – концентрація гідроксид-іонів $OH^-.$ Пригадаємо хімічний закон: $xy=k,$ де k – стала для води (при $25^\circ C k=10^{-14}).$ Задача зводиться до знаходження найменшого значення функції $u=x+y=x+\frac{k}{x}.$ Продиференціювавши функцію $u(x)=x+\frac{k}{x},$ знаходимо: $u'(x)=1-\frac{k}{x^2}.$ $u'(x)=0$ при $x=\pm\sqrt{k}.$ Оскільки $x>0,$ то функція має єдину стаціонарну точку на всій області визначення. Знайшовши другу похідну $u''(x)=\frac{2k}{x^3}$ та її значення в стаціонарній точці $u''\left(\sqrt{k}\right)=\frac{2}{\sqrt{k}}>0,$ на основі достатньої умови існування екстремуму функції робимо висновок, що точка $x=\sqrt{k}$ є точкою мінімуму. Завдяки єдиності стаціонарної точки функція $u(x)$ досягає в ній найменшого значення. За згаданим законом $y=\sqrt{k}.$ Отже, сума іонів води буде найменшою, якщо концентрація іонів H^+ і OH^- будуть рівні між собою, тобто при нейтральній реакції $\left(x=y=\sqrt{k}\right).$

Задача 7. Знайти роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати через край рідину з вертикального циліндричного резервуара висоти H м і радіусом основи R м (рис. 2).

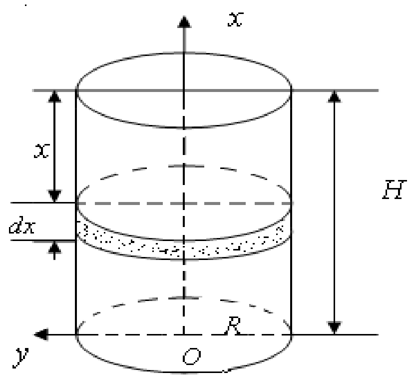


Рис. 2. Циліндричний резервуар висоти H і радіус основи R

Розв’язання. Робота, що витрачається на викачування з резервуара рідини товщиною $x(0 \le x \le H)$, є функція від x, тобто $A = A(x)$, де $(0 \le x \le H)(A(0) = 0, A(H) = A_0)$. Знайдемо головну частину приросту ΔA при зміні x на величину $\Delta x = dx$, тобто знайдемо диференціал dA функції $A(x)$. Завдяки, малості dx вважаємо, що “елементарний” шар рідини перебуває на одній глибині x (від краю резервуара). Тоді $dA = dpx$, де dp – вага цього шару, g – прискорення вільного падіння, γ – щільність рідини, dv – об’єм “елементарного” шару рідини (на рис. 1 він виділений), тобто $dp = g\gamma dv$. Об’єм зазначеного шару рідини, дорівнює $\pi R^2 dx$, де dx – висота циліндра (шаруючи), πR^2 – площа його основи, тобто $dv = \pi R^2 dx.$ Таким чином, $dp = g\gamma \cdot \pi R^2 dx$ і $dA = g\gamma\pi R^2 dx \cdot x.$ Інтегруючи отриману рівність у границях від $x = 0$ до $x = H,$ знаходимо $A_0 = \int_0^H g\gamma\pi R^2 x dx = \; = \frac{1}{2} g\gamma R^2 H^2 \,(Дж.).$

Задача 8. Знайти формулу знаходження загальної біомаси популяції, у якій маса особини помітно змінюється протягом життя.

Розв’язання. Нехай τ означає вік у тих або інших одиницях часу, а $N(\tau)$ – число особин популяції, вік яких дорівнює $\tau,$ $P(\tau)$ – середня маса особини віку $\tau,$ а $M(\tau)$ – біомаса всіх особин у віці від 0 до $\tau.$ Помітивши, що добуток $N(\tau)P(\tau)$ дорівнює біомасі всіх особин віку $\tau,$ розглянемо різницю $M(\tau + \Delta\tau) - M(\tau),$ де $\Delta\tau > 0.$

Очевидно, що ця різниця дорівнює біомасі всіх особин у віці від τ до $\tau+\Delta\tau$ і задовольняє подвійну нерівність: $N(\tau)P(\tau)\Delta\tau \le M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau) \le \ \le N(\tilde{\tau})P(\tilde{\tau})\Delta\tau.$ $N(\tau)P(\tau)$ – найменше, а $N(\tilde{\tau})P(\tilde{\tau})$ – найбільше значення функції $N(\tau)P(\tau)$ на відрізку $[\tau,\tau+\Delta\tau].$ З огляду на те, що $\Delta\tau>0,$ з нерівності $N(\tau)P(\tau)\Delta\tau \le M(\tau+\Delta\tau) - M(\tau) \le N(\tilde{\tau})P(\tilde{\tau})\Delta\tau$ маємо: $N(\tau)P(\tau) \le \frac{M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau)}{\Delta\tau} \le N(\tilde{\tau})P(\tilde{\tau}).$

З неперервності функції $N(\tilde{\tau})P(\tilde{\tau})$ (вона неперервна, оскільки $N(\tilde{\tau})$ і $P(\tilde{\tau})$ неперервні) маємо, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[N(\tau)P(\tau)\right]=$. $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[N(\tilde{\tau})P(\tilde{\tau})\right]=N(\tau)P(\tau).$ Тоді: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau)}{\Delta\tau}=N(\tau)P(\tau),$ або $\frac{dM(\tau)}{d\tau}=N(\tau)P(\tau).$ Отже, біомаса $M(\tau)$ є первісною для $N(\tau)P(\tau)$. Звідси: $M(T)-M(0)=\int\limits_0^T N(\tau)P(\tau)dt,$ де T – максимальний вік особини в цій популяції. Оскільки $M(0)$ дорівнює нулю, то остаточно одержуємо: $M(T)=\int\limits_0^T N(\tau)P(\tau)dt.$

Задача 9. Під будівництво гідроелектростанції заданий безперервний грошовий потік зі швидкістю $I(t)=-t^2+20t+5$ (млрд грн./рік) протягом 20 років з річною процентною ставкою $p=5\%$. Знайти дисконтну вартість цього потоку.

Розв’язання. Учням класів економічного профілю доцільно нагадати, іншим учням повідомити формулу знаходження дисконтної вартості $\Pi=\int\limits_0^T I(t)e^{-pt}dt.$

Маємо $\Pi=\int\limits_0^{20}(-t^2+20t+5)e^{-0,05t}dt.$ Щоб обчислити цей інтеграл, виконаємо спочатку заміну змінної: $s=-0,05t,\ t=-20s,\ dt=-20ds.$ При цьому нові межі інтегрування отримуємо підстановкою старих меж у формулу заміни: $s_0=0,\ s_1=-1$. Маємо $\Pi=-20\int\limits_0^{-1}\left(-400s^2-400s+5\right)e^s \ =20\int\limits_{-1}^{0}\left(-400s^2-400s+5\right)e^s ds.$ До останнього інтеграла застосуємо формулу інтегрування за частинами, приймаючи, що $u=-400s^2-400s+5,$ $du=\left(-800s-400\right)ds,$ $dv=e^s ds,$ $v=e^s$. Звідси $\Pi=20(\left(\left(-400s^2-400s+5\right)e^s\right)\Big|_{-1}^{0}+\int\limits_{-1}^{0}e^s\left(800s+400\right)ds).$ У першому доданку встановимо межі інтегрування, а в другому – застосуємо формулу інтегрування за частинами, приймаючи $u = 800s + 400,\ du = 800ds.$ Маємо,

$\Pi = 20(5 - 5e^{-1} + (800s + 400)e^s\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 800e^s ds) =$ $20(5 - 5e - 1 + 400 + (800 - 400)\times$ $e - 1 - 800 + 800e - 1) =$

$= 20(1195e - 1 - 395)$.

Остаточно одержуємо $\Pi = 892$ (млрд. грн.).

2.2.2. Технологічний напрям

Задача 10. Дощова крапля падає під дією сили тяжіння, рівномірно випаровуючись так, що її маса m змінюється згідно із законом $m(t) = 1 - \frac{2}{3}t$ (m змінюється в грамах, t – в секундах). Через скільки часу після початку падіння кінематична енергія краплі буде найбільшою?

Розв’язання. Визначимо, що швидкість краплі $v(t) = gt.$ Її кінетична енергія у момент t дорівнює $E_k = \frac{m(t)v^2(t)}{2} = \frac{1}{2}g^2t^2 - \frac{1}{3}g^2t^3.$ Щоб відповісти на поставлене питання потрібно дослідити функцію $E_k(t)$ на найбільше значення за допомогою похідної: $E'_k = g^2(t - t^2);$ нехай $E'_k = 0$, тоді $t_1 = 0,\ t_2 = 1\ (t > 0)$.

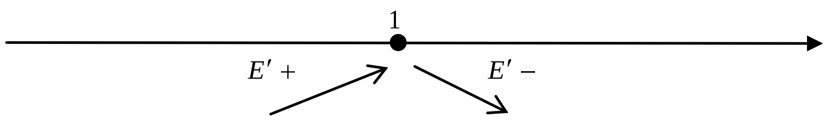


Рис. 3. Зображення спадання і зростання функції

При t = 1 функція набуває найбільшого значення, отже кінетична енергія падаючої краплі буде найбільшою через 1 секунду після початку руху.

Задача 11. Потрібно побудувати відкритий циліндричний резервуар, який вміщує в собі об’єм V_0. Матеріал має товщину d. Якими повинні бути розміри резервуару (радіус основи та висота), щоб витрати матеріалу були найменшими?

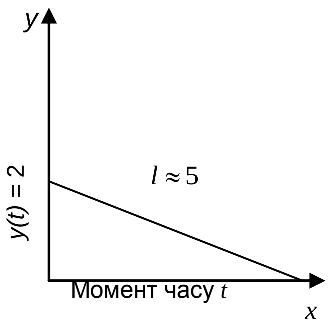
Розв’язання. Радіус основи внутрішнього циліндру позначимо через x, висоту внутрішнього циліндру через h. Об’єм дна і стінки резервуару $V = \pi(x+d)^2 d + \pi\left[(x+d)^2 - x^2\right]h = \pi d(x+d)^2 + \pi h(2xd + d^2)(*).$ З іншого боку, за умовою $V_0 = \pi x^2 h,$ звідки $h = \frac{V_0}{\pi x^2}.$ Підставляючи в (*), знаходимо

$V = \pi d(x+d)^2 + \frac{\pi V_0}{\pi x^2}(2xd + d^2) = \pi d(x+d)^2 + \frac{2V_0 d}{x} + \frac{V_0 d^2}{x^2}.$ Отриману функцію $V(x)$ потрібно дослідити на екстремум (за умови x > 0): $V'(x) = 2\pi d(x+d) - \frac{2V_0 d}{x^2} - \frac{2V_0 d^2}{x^3} = \frac{2d(x+d)(\pi x^3 - V_0)}{x^3}.$

Виконавши дослідження маємо: $x = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}.$ Отже $h = \frac{V_0 \sqrt[3]{\pi^2}}{\pi \sqrt[3]{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}} = x.$

Задача 12. Драбина завдовжки 5 м приставлена до стіни таким чином, що верхній її кінець знаходиться на висоті 4 м. У деякий момент часу драбина починає падати, при цьому верхній кінець наближається до поверхні землі зпостійним прискоренням 2 м/с. З якою швидкістю віддаляється від стіни нижній кінець драбини в той момент, коли верхній кінець знаходиться на висоті 2 м?

Розв’язання. Побудуємо графіки функції у момент часу t та у момент часу t = 0.



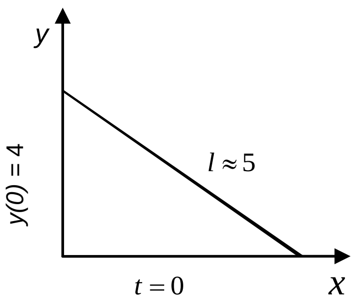


Рис. 4. Графік функції у момент часу t

Рис. 5. Графік функції у момент часу t=0

Якщо верхній кінець сходів у момент часу t знаходиться на висоті $y(0) = 4\,(м),$ а нижній на відстані $x(t)$ від стінки, то висота $y(t)$ описується формулою: $y(t) = 4 - \frac{at^2}{2} = 4 - t^2,$ оскільки рух, в нашому випадку, рівноприскорений.

Розглянемо поведінку тіла у момент часу t: $y(t) = 2,$ тобто $2 = 4 - 2t.$ Звідси $t = \sqrt{2}.$ За теоремою Піфагора $x(t) = \sqrt{l^2 - y(t)^2},$ тобто $x(t) = \sqrt{25 - \left(4 - t^2\right)^2} = \sqrt{9 + 8t^2 - t^4}.$ Пригадаємо, що $v(t) = x'(t),$ тобто швидкість зміни

$v(t)=x'(t)=\frac{16t-4t^3}{2\sqrt{9+8t^2-t^4}}=\frac{8t-2t^3}{\sqrt{9+8t^2-t^4}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{21}}\approx$ $\approx 1,2\ (м/с).$ Отже, швидкість зміни приблизно дорівнює 1,2 (м/с).

Задача 13. З колоди, яка має радіус R, зробити балку найбільшої міцності.

Розв'язання. Будуємо математичну модель задачі. У цій задачі висота балки (яка має вигляд прямокутника з шириною x, вписаного в коло радіусом R), дорівнює $\sqrt{4R^2-x^2}$. Тому міцність такої балки дорівнює $y=kx(4R^2-x^2)$. При цьому x змінюється від 0 до $2R.$

Функція $y=kx(4R^2-x^2)$ прямує до нуля при $x=0$ і $x=2R$ і додатня між цими значеннями. Отже, вона має максимум, котрий лежить між 0 та $2R$. Проте похідна цієї функції $y'=k(4R^2-3x^2)$ прямує до нуля на відрізку $[0;2R]$ тільки при $x=\frac{2}{3}R\sqrt{3}.$ Це і є оптимальне значення ширини b балки. Висота h балки такої ширини дорівнює $\frac{2}{3}R\sqrt{6}$, а відношення $\frac{h}{b}$ дорівнює $\sqrt{2}\approx 1,4=\frac{7}{5}.$ Саме таке відношення висоти випиляної балки до її ширини передбачено правилами проведення будівельних робіт.

Задача 14. Визначити величину тиску води на півколо, вертикально занурене в рідину, якщо його радіус R, а центр перебуває на вільній поверхні води (рис. 6).

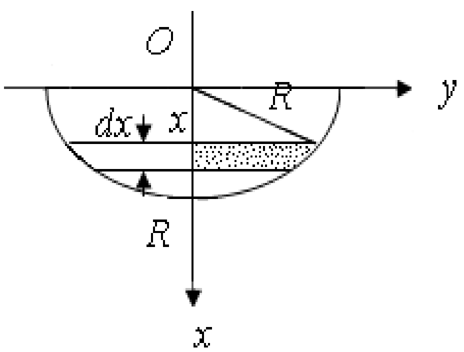


Рис. 6. Півколо, вертикально занурене в рідину, і його радіус R

Розв’язання. Використаємо формулу для знаходження тиску рідини на вертикальну пластинку: $P = g \cdot \gamma \cdot \int\limits_a^b (y_2 - y_1) x dx.$ За допомогою рисунку визначимо, якими лініями обмежена пластинка. У цьому випадку пластинка обмежена лініями $y_1 = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $y_2 = \sqrt{R^2 - x^2}$, x=0, $x = R$. $P = g \cdot \gamma \int\limits_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right) - \left(-\sqrt{R^2 - x^2} \right) \Big) x dx = 2g \cdot \gamma \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - x^2} x dx =$

$$= 4g\gamma \cdot (\frac{1}{2}) \int\limits_0^R (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} d(R^2 - x^2) dx = -g\gamma \cdot \frac{4\sqrt{(R^2 - x^2)^3}}{3} \Bigg|_0^R = -\frac{4}{3} g\gamma (0 - R^3) = \ = \frac{4}{3} g\gamma R^3.$$

Задача 15. Сергій насипав у циліндричну каструлю трошки крупи та запитав маму: “Скільки потрібно налити води, щоб зварити смачну кашу?.” “Це дуже просто, – відповіла мама. – Нахили каструлю, постукай, щоб крупа пересипалась і закрила рівно половину дна. Тепер зафіксуй точку на стінці каструлі біля краю, до якого піднялася крупа. До цього рівня і потрібно налити воду”. “Але крупи можна насипати більше або менше, та й каструлі бувають різні – широкі, вузькі”, – сказав Сергій. “Не має значення, цей спосіб стане у пригоді в будь-якому випадку”, – відповіла мама. Чи справді це так?

Розв’язання. Моделлю каструлі з крупою може бути циліндр, який заповнено речовиною (рис. 7).

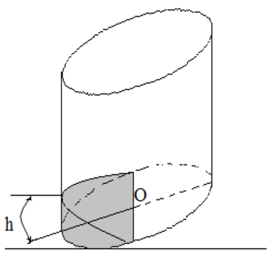


Рис. 7. Модель каструлі з крупою

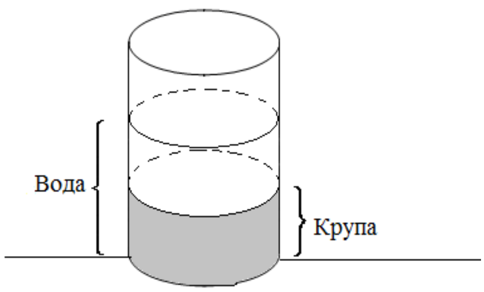


Рис 8. Модель каструлі з крупою та водою

А моделлю каструлі з крупою та водою може бути той же циліндр (рис. 8).

Крупа займає в цьому циліндрі об'єм $V_к$, а вода – об'єм $V_в$. Щоб перевірити, чи правильним буде твердження, висловлене мамою, потрібно відповісти на запитання: "Чи змінюється відношення цих об'ємів залежно від форми циліндра?". Отже, приходимо до математичної задачі: "Визначити відношення об'ємів $V_к$ і $V_в$". Модель, що досліджується, помістимо в прямокутну систему координат так, щоб основа циліндра належала площині XOY, а центр основи О був початком координат (рис. 9).

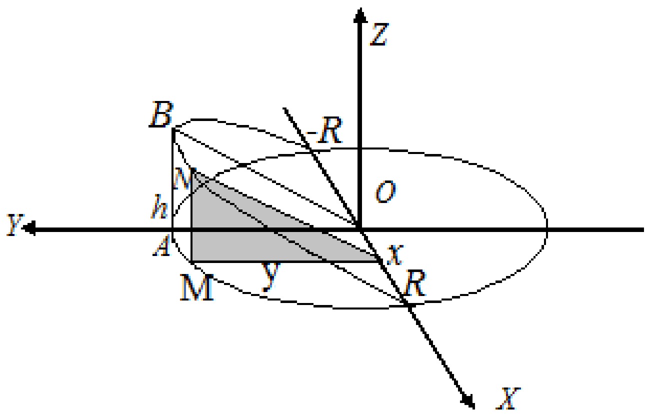


Рис. 9. Модель, що досліджується поміщена в прямокутну систему координат

Через точку x на осі ОХ, $x \in [-R; R]$, будуємо переріз тіла (тобто гірки із крупи всередині каструлі) площиною, що перпендикулярна до осі ОХ. У перерізі отримаємо трикутник $MNx.$. ΔMNx подібний до $\Delta ABO.$ Тоді $\frac{MN}{h} = \frac{y}{R}.$ Звідси $MN = \frac{yh}{R}$. Площа ΔMNx дорівнює: $S_{\Delta MNx} = 0,5MN \cdot Mx,$ $S_{\Delta MNx} = \frac{hy^2}{2R}.$ Оскільки точка М належить колу радіуса R і має координати $(x; y)$, то отримаємо $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 = R^2 - x^2.$ Тоді

$S_{\Delta MNx} = \frac{h\left(R^2 - x^2\right)}{2R}$. Використовуючи визначений інтеграл (як математичну модель), отримаємо $V_к = 2\int_0^R \frac{h\left(R^2 - x^2\right)}{2R} = \frac{h}{R}\int_0^R (R^2 - \quad - x^2)dx = \frac{2}{3}h(R^2 - x^2)dx.$

Отже, $V_в = V_ц - V_к = \pi R^2 h - \frac{2}{3}R^2 h = \frac{R^2 h}{3}(3\pi - 2).$ Відповідно, $\frac{V_в}{V_к} = \frac{3\pi}{2} - 1 \approx 3{,}5 \ (const).$ Як бачимо, це відношення не залежить від розмірів каструлі. Тому й готування смачної каші за маминим рецептом не залежить від розмірів каструлі.

2.2.3. Суспільно-гуманітарний

Задача 16. Реакції організму на два види ліків як функції часу t (час виражено у годинах) складають $r_1(t) = te^{-t}$ і $r_2(t) = t^2 e^{-t}$. У якого виду ліків максимальна реакція вища? Ліки якого виду діють повільніше?

Розв'язання. Продиференціювавши функції $r_1(t)$ і $r_2(t)$, що визначені та неперервні на проміжку $(0;\infty)$, і розв'язавши рівняння $(1-t)e^{-t} = 0$ і $(2-t)te^{-t} = 0,$ з'ясуємо, що ці функції на вказаному проміжку мають такі стаціонарні точки $t_1 = 1; t_2 = 2\,; t_3 = 0.$ Оскільки час $t > 0$, то на всій області визначення кожна функція має єдину стаціонарну точку $t_1 = 1; t_2 = 2.$ Оскільки при переході через стаціонарну точку знак похідної змінюється з "+" на "-", то на підставі достатньої умови існування екстремуму в точці робимо висновок, що точка $t_1 = 1$ є точкою максимуму функції $r_1(t)$, а точка $t_2 = 2$ є точкою максимуму функції $r_2(t)$. Знайшовши максимуми функції $r_1(1) = 1/e \approx 0{,}37$ і $r_2(t) = 4/e^2 \approx 0{,}54$, з'ясуємо, що у другого виду ліків максимальна реакція вища і вони діють повільніше.

Задача 17. Вивести формулу для обчислення чисельності населення на обмеженій території у момент часу t.

Розв'язання. Нехай $y = y(t)$ – чисельність населення. Розглянемо приріст населення за $\Delta t = t - t_0$, тоді $\Delta y = ky\Delta t,$ де $k = k_p - k_c$ – коефіцієнт приросту (k_p–

коефіцієнт народжуваності, k_c– коефіцієнт смертності). $\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky.$ При $\Delta t \to 0$ отримуємо $\lim\limits_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'.$ Отже, $y' = ky$.

Задача 18. Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їх маса збільшується на 3% за кожну годину. Знайдіть наближене значення маси дріжджів через 10 хвилин, якщо її початкове значення дорівнює 1 г.

Розв’язання. Математичною моделлю даної задачі є функція $m(t) = (1 + 0,03)^t = 1,03^t.$ Для функції $f,$ диференційованої в точці $x,$ і достатньо малих Δx має місце наближена рівність: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$ Скориставшись цією формулою, маємо: $x_0 = 1,$ $\Delta x = 0,03,$ $f(x_0) = x_0^{\frac{1}{6}} = 1,$ $f'(x_0) = \frac{1}{6} \cdot x^{\frac{-5}{6}} = \frac{1}{6}$ і, отже, $(1 + 0,03)^{\frac{1}{6}} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0,03 \approx 1,005$ (г).

Задача 19. Знайдіть середню довжину пробігу, або середню довжину шляху при проходженні твариною деякої фіксованої ділянки.

Розв’язання. У деяких дослідженнях необхідно знати середню довжину пробігу, або середню довжину шляху при проходженні твариною деякої фіксованої ділянки. Проведемо відповідний розрахунок для птахів на певній ділянці у вигляді кола з радіусом R, по якому рухаються птахи. R не занадто велике, так що більшість птахів досліджуваного виду перетинає це коло по прямій. Птах може під будь-яким кутом у будь-якій точці перетнути коло. Залежно від цього довжина його прольоту навкруги може бути рівній будь-якій величині від 0 до 2R. Для розв’язання задачі потрібна середня довжина прольоту (рис. 10).

Якщо коло симетричне відносно будь-якого свого діаметра, досить обмежитися лише тими птахами, які летять у якому-небудь одному напрямку, паралельному осі $Oy.$ Тоді середня довжина прольоту – це середня відстань між дугами ACB й AC_1B. Іншими словами, це середнє значення функції $f_1(x) - f_2(x)$, де $y = f_1(x)$ – рівняння верхньої дуги, а $y = f_2(x)$ – рівняння нижньої дуги, тобто,

$L=\frac{\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx}{b-a}$, або $L=\frac{\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx}{b-a}$. Оскільки $\int_a^b f_1(x)dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції $aACBb$, а $\int_a^b f_2(x)dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції aAC_1Bb, то їхня різниця дорівнює площі круга, тобто πR^2. Різниця $b-a$ дорівнює $2R$. Підставивши ці дані в $L=\frac{\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx}{b-a}$, одержимо: $L=\frac{\pi R^2}{2R}=\frac{\pi}{2}R$.

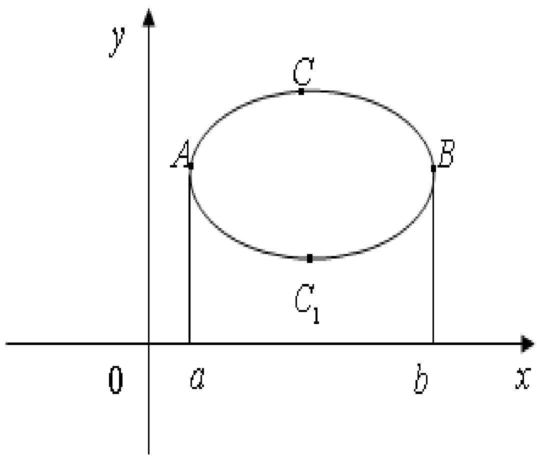


Рис. 10. Середня довжина прольоту

Задача 20. Дано функцію граничних витрат $MC=3q^2-48q+202, 1\le q\le 20$. Знайти функцію витрат $C=C(q)$ і обчислити витрати у випадку виробництва 10 одиниць товару, якщо відомо, що витрати для виробництва першої одиниці товару склали 50 грн.

Функцію витрат знайдемо інтегруванням: $C(q)=\int_1^q MCdq+C_0,$ де константу C знаходимо з умови задачі $C(1)=50,$ тоді $C_0=50.$ Інтегруючи, одержуємо функцію витрат $C(q)=q^3-24q^2+202q+50.$ Підставляючи $q=10$ в отриману формулу, знаходимо шукане значення $C(10)=670$.

Використані джерела

1. Ачкан В.В. Прикладні задачі як засіб формування математичних компетентностей учнів у процесі вивчення рівнянь і нерівностей в курсі алгебри та початків аналізу / В. В. Ачкан // Математика в школі. – 2009. – № 1, 2. – С. 31 – 34.
2. Ачкан В.В. Виділення орієнтовних основ діяльності з розв’язування рівнянь та нерівностей як засіб формування математичних компетентностей старшокласників / В. В. Ачкан // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – Бердянськ : БДПУ, 2010. – № 3. – С. 216 – 222.
3. Бібік Н.М., Єрмаков І.Г., Овчарук О.В. Компетентнісна освіта – від теорії до практики. - К.: Плеяда, 2005. - 120с.
4. Бондаренко Т. Практичні роботи на уроках математики. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://klass.ho.ua/index.php?job=10002910.
5. Возняк Г.М., Маланюк К.П. Взаємозв’язок теорії з практикою в процесі вивчення математики: Посібник для вчителя.-К.: Рад. шк., 1989. - 128с.
6. Киякбаева А. Л. Необходимость использования прикладных задач в обучении математике // Молодой ученый.—2015. — №19. — С. 9-11. [электронный ресурс]. — Режим доступу : http://moluch.ru/archive/99/22150/13.
7. Математика. Програми для 10 – 11 класів. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу : – // www.mon.gov.ua/ main.php?query= education /average/prog12
8. Матяш О. І. Актуальні проблеми формування методичних компетентностей майбутніх учителів математики / О. І. Матяш // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: Зб. наук.праць. – Вип. 33. – Київ-Вінниця, 2012. – С. 404-407.
9. Прикладна спрямованість стереометрії:10-11кл./А. Прус, В. Швець.-К.: Шк. Світ,2007.-128с.
10. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: монографія / С. А. Раков. – Х. : Факт, 2005. – 360с.
11. Соколенко Л. О. Про необхідність створення системи прикладних задач природничого характеру для профільного навчання математики www.nbuv.gov.ua/Portal/Soc_Gum/Dmpd/2005_24/_24/218- 222%2024_2005.pdf 5.
12. Ткач, Ю. М. Математика. Задачі економічного змісту в математиці: навчально-методичний посібник / Ю. М. Ткач. - Х. : Ранок, 2011. - 176 с.
13. Формування життєвих вмінь та навичок учнів на уроках математики шляхом використання прикладних задач. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://schoolv.ucoz.ru/publ/formuvannja_zhittevikh_vmin_ta_navichok_uchniv_na_urokakh_matematiki_shljakhom_vikoristannja_prikladnikh_zadach/1-1-0-1
14. Швець В.О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики / В.О.Швець // Дидактика математики : проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк : Вид-во ДонНУ, 2009. – № 32. – С. 16-23.