Піраміда. Площа поверхні та об'єм піраміди.

Автор:Сорочинська Валентина Андріївна,
вчитель НВК №19 м. Рівне

Мета: Розширити знання учнів про піраміду. Ознайомити учнів з поняттям бічної поверхні піраміди, з поняттям повної поверхні піраміди, з правилами знаходження площі бічної поверхні та площі повної поверхні піраміди. Ввести поняття апофеми правильної піраміди. Навчити розв'язувати задачі на знаходження площі поверхні та об'єму піраміди. Розвивати в учнів просторову уяву.

Обладнання. Таблиця (додаток №3), стереометричний ящик, стереометричні фігури, епіпроектор.

Хід уроку

I. Аналіз домашнього завдання із перевіркою розв'язань кожної задачі.

II. Вивчення нового матеріалу.

На минулому уроці ми розглядали макети різних многогранників, серед яких і піраміда.

Виберіть піраміду серед многогранників і дайте відповідь на такі питання:

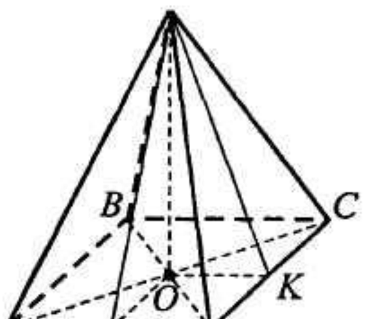
1. Скільки основ має піраміда?
2. Чим являється кожна бічна грань піраміди?
3. Як називається точка, в якій сходяться всі бічні грані піраміди?
4. Як знайти відстань від цієї точки до основи піраміди.
5. Як буде називатись цей перпендикуляр?(висота піраміди).

Кладемо всі піраміди на бічну грань і ставимо запитання: «Чи змінилась відстань від вершини піраміди до її основи?» Отже, у кожній піраміді виявився ще один відрізок, який несе суттєву інформацію про даний многогранник. Такий відрізок у піраміді називається її висотою.

Висотою піраміди називається перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до її основи.

Як і призма так і піраміда є тілом. Тому щоб мати уявлення про піраміду уявляємо собі не пустотний каркас, а вистругану з дерева, вилиту зі сталі, вирізану із пінопласту піраміду (многогранник), у якого 1 основа (многокутник), а всі інші грані – трикутники.

М **Основні властивості піраміди.**



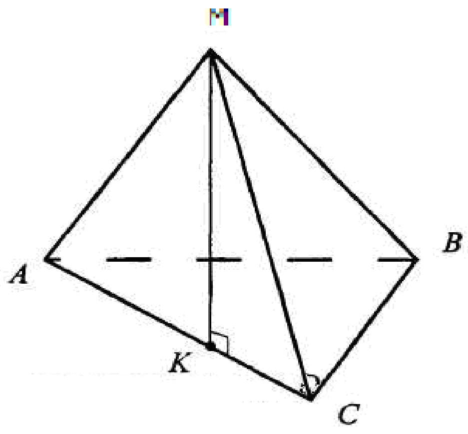
1. Основа: чотирикутник ABCD. В основі піраміди може бути будь-який многокутник.

2. Всі бічні ребра MA_1, MB_1, MC_1, CD сходяться в одній точці М – вершині піраміди.
3. Бічні грані – трикутники.

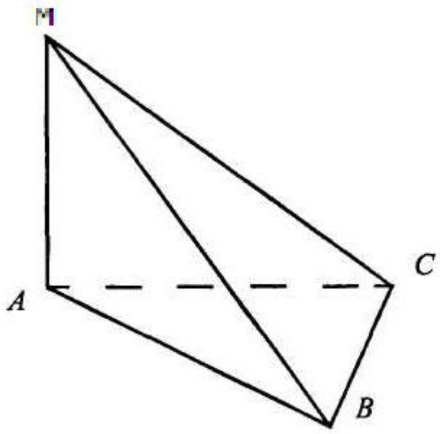
Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини називається **апофемою.**

МК – апофема.

Якщо в основі піраміди є правильний многокутник, а основа висоти піраміди лежить в центрі цього многокутника, то піраміда називається правильною. Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, усі бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники.



Грань МАС перпендикулярна до площини основи піраміди АВС, тоді МК – висота піраміди і висота бічної грані АМС.



Грані МАС і МАВ перпендикулярні до основи, АМ – їх спільне ребро, тоді МА-висота піраміди та висота бічних граней АМС і ВМА.

2. Бічна поверхня та об‘єм піраміди.

Бічна поверхня піраміди дорівнює сумі площ бічних граней.

Бічна поверхня правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему.

$S_{біч.пір} = \frac{Pl}{2}$, де Р – периметр основи; l – апофема.

Для того щоб знайти площу повної поверхні піраміди, потрібно обчислити площу її бічних граней і основи та отримані значення додати.

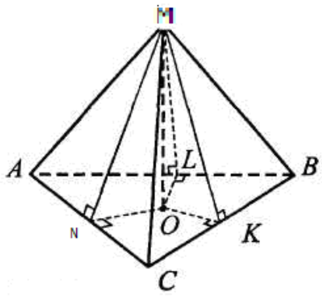
$S_{пір} = S_{біч} + S_{осн}$

Об‘єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту.

$V = \frac{1}{3} S_{осн} * H$

ІІІ. Розв’язування задач.

Задача1. Основою піраміди є трикутник площа якого дорівнює 60см^2. Радіус кола, вписаного в нього 5см. Висоти всіх бічних граней 10см. Обчисліть бічну поверхню піраміди та її об‘єм.



Розв’язання:

Нехай MABC – дана піраміда.

$S_{\Delta ABC} = 60 см^2$

MN, NK, ML – висоти бічних граней, MN=MK=ML=10 (за умовою)

$\Delta MNO = \Delta MKO = \Delta MLO$ (за гіпотенузою і катетом).

ON=OK=OL= r =5см.

$S_{біч}=S_{AMC}+S_{CMB}+S_{AMB}=\frac{1}{2}AC*MN+\frac{1}{2}CB*MK+\frac{1}{2}AB*ML=\frac{1}{2}MN(AC+CB+AB)=\frac{1}{2}*10*P_{ABC}$

Оскільки $r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2S}{P}$, то $P=\frac{2S}{r}=\frac{2*60}{5}=24 см$.

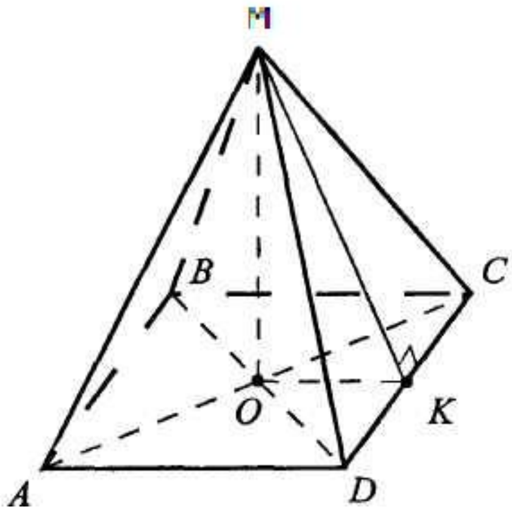
Тоді $S_{біч}=5*P_{\Delta ABC}=5*24=120 см^2$.

В ΔMON: $MO=\sqrt{MN^2-NO^2}=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{(10-5)*(10+5)}=\sqrt{5*15}=5\sqrt{3} см$

Отже, $V=\frac{1}{3}S_{осн}*MO=\frac{1}{3}*60*5\sqrt{3}=100\sqrt{3}(см^3)$.

Відповідь: 120 см^2, $100\sqrt{3} см^3$.

Задача2. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6см,15см. Висота піраміди дорівнює 4см і проходить через точку перетину діагоналей основи. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.



Розв’язання: Нехай MABCD – дана піраміда. Основа піраміди – прямокутник ABCD, CD=6см, AD=15см. MO – висота піраміди. MO=4см. Нехай MN та MK – висоти двох нерівних бічних граней AMD і DMC відповідно. Зрозуміло, що тоді

$NO=\frac{1}{2}DC=3(см)$

$KO=\frac{1}{2}*AD=7{,}5(см)$

В ΔMON: $MN=\sqrt{MO^2+ON^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5(см)$

В ΔMOK:

$MK=\sqrt{MO^2+OK^2}=\sqrt{4^2+(7.5)^2}=\sqrt{72.25}=$

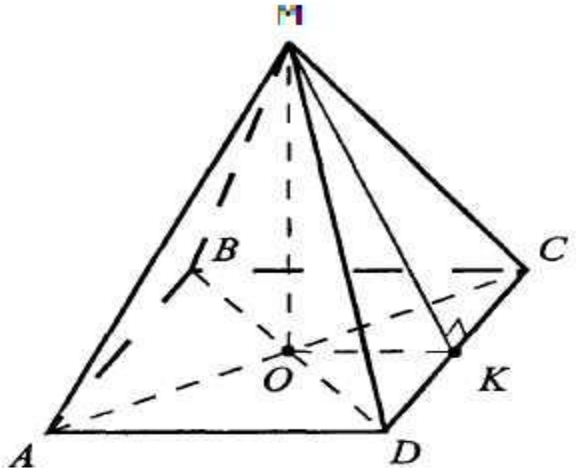
=8,5(см)

$S_{біч}=2*\frac{1}{2}*MN*AD+2*\frac{1}{2}*MK*DC=$

15*5+6*8,5=126(см^2)

Відповідь: 126см^2.

Задача3. В основі піраміди лежить ромб площа якого 60 см^2, а його сторона – 25см. Основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей ромба. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди, якщо її основа дорівнює 10см.



Розв'язання:

Нехай MABCD – дана піраміда

Основа піраміди ромб ABCD

AB=25см. S_{ABCD}=600см^2

MO – висота піраміди

MO=10см

MN і MK – висоти бічних граней AMD і DMC відповідно. Оскільки $\Delta AOD=\Delta AOB=\Delta COD=\Delta COB$ за трьома сторонами, то OK=ON – як висоти рівних трикутників.

$\Delta MON=\Delta MOK$(за двома катетами)

MN=MK

$S_{\Delta AOD}=\frac{1}{4}S_{ромба}=150(см^2)$

$S_{\Delta AOD}=\frac{1}{2}AD*ON=\frac{1}{2}*25*ON;$

$ON=\frac{2S}{25}=\frac{2*150}{25}=12(см)$

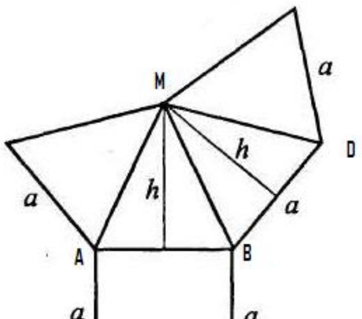
$В\Delta MON: MN=\sqrt{MO^2+ON^2}=\sqrt{10^2+12^2}=\sqrt{100+144}=\sqrt{244}=4\sqrt{61}$

$S_{біч}=S_{\Delta AMB}+S_{\Delta BMC}+S_{\Delta CMD}+S_{\Delta AMD}=4*\frac{1}{2}*AD*MN=2*25*\sqrt{244}=50\sqrt{4*61}=$

$=100\sqrt{61}$ (см^2)

Відповідь: $100\sqrt{61}$ (см^2)

Задача4. Накресліть розгортку та обчисліть площі бічної та повної поверхонь правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6см, а бічне ребро – 5см.



Розв'язання:

$$S_{біч} = S_{\Delta AMB} + S_{\Delta BMC} + S_{\Delta CMD} + S_{\Delta AMD} =$$
$$= \frac{1}{2} AB * MK + \frac{1}{2} BC * MK + \frac{1}{2} CD * MK + \frac{1}{2} DA * MK =$$
$$= \frac{1}{2} P_{осн} * MK = \frac{1}{2} * 4 * 6 * MK = \frac{1}{2} 4 * 6 * 4 = 48(см^2)$$
$$S_{\Delta ABCD} = AB^2 = 6^2 = 36 см^2.$$
$$S_{пір} = S_{біч} + S_{осн} = 48 + 36 = 84(см^2)$$

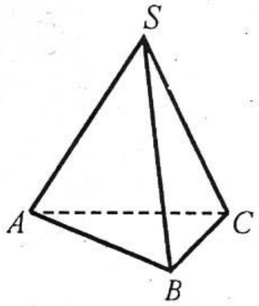
IV. Підсумок уроку

На сьогоднішньому уроці ми розглянули ще один вид многогранника – піраміду. Розглянули різні види пірамід. Дали означення висоти її бічної грані – апофеми. Навчились обчислювати площу бічної та повної поверхонь піраміди та її об’єм.

V. Домашнє завдання.

Піраміда

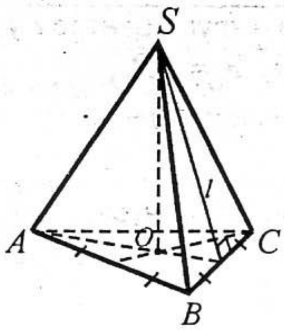
Пірамідою називається многогранник, який складається з плоского многокутника, точки, яка не лежить в площині основи, та всіх відрізків, які з'єднують вершину піраміди з точками основи.



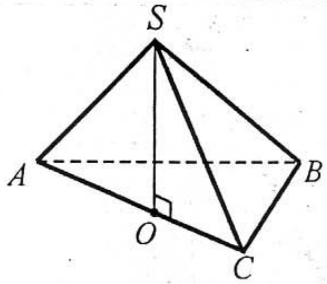
$S \notin (ABC)$. S – вершина;

ΔABC – основа, всі грані – трикутники.

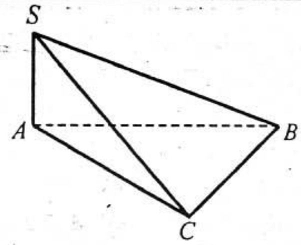
(ASB), (BSC), (ASC) – бічні грані. SA, SB, SC – бічні ребра.



SO – висота піраміди.
SM – висота бічної грані.



Грань ASC перпендикулярна площині основи.
SO – висота піраміди і висота бічної грані ASC.

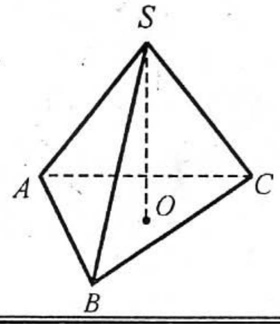


Грані ASC і BSC перпендикулярні площині основи.
AS – їх спільне бічне ребро.
AS – висота піраміди та бічних граней ASC і ASB.

Бічна поверхня та об'єм піраміди

Бічна поверхня піраміди дорівнює сумі площ бічних граней піраміди.

Об'єм піраміди дорівнює одній третині добутку площі основи на висоту піраміди.

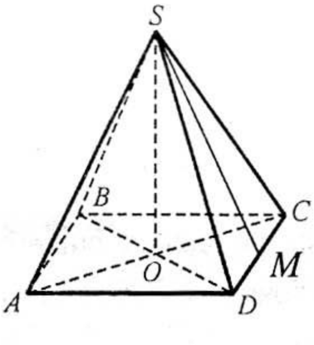


$$S_{бічн.пір.} = S_{\Delta ASB} + S_{\Delta BSC} + S_{\Delta ASC}$$

$$V_{пір.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO$$

2. Скільки квадратних метрів полотна витратили на виготовлення намету, який має форму правильної чотирикутної піраміди, якщо сторона її основи дорівнює $3,2\,м$, а апофема піраміди $5,1\,м$? (Витрата матеріала на шви і обрізки складає 8% бічної поверхні піраміди).

Розв'язання.



Витрата тканини на виготовлення намету дорівнює площі бічної поверхні піраміди $SABCD$ і витраті на шви та обрізки при шитті.

$S_{бічн.пір.} = 4 \cdot S_{бічн.гр.} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot DC \cdot SM$, де SM – апофема піраміди.

$S_{бічн.пір.} = 2 \cdot 3,2 \cdot 5,1 = 32,64\,(м^2)$. Знайдемо витрату тканини на шви та обрізки: $32,64 \cdot 0,08 = 2,6112 \approx 2,6\,(м^2)$.

Витрата тканини на виготовлення намету дорівнює: $32,64 + 2,6 \approx 35,24\,(м^2)$.

Відповідь: $35,2\,м^2$.