

Тема уроку. Довжина кола і дуги кола.

Мета уроку: виведення формул для знаходження довжини кола та довжини дуги кола. Формування вмінь учнів застосовувати виведені формули до розв'язування задач.

Тип уроку: комбінований.

Наочність і обладнання: таблиця «Довжина кола і площа круга» [13].

Вимоги до рівня підготовки учнів: записують і пояснюють формули довжини кола і дуги кола. Формулюють теорему про відношення довжини кола до його діаметра. Застосовують вивчені формули до розв'язування задач.

Хід уроку

I. Перевірка домашнього завдання, актуалізація опорних знань учнів

Перевірити наявність виконаних домашніх завдань та відповісти на запитання, які виникли в учнів при виконанні домашніх завдань.

Задача 1. Розв'язання

Нехай $BD = 4$ см (рис. 88), тоді $OB = \frac{BD}{2} = \frac{4}{2} = 2$ см, $AB = OB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (см).

Відповідь. $2\sqrt{2}$ см.

Задача 2. Доведення

Нехай $ABCD$ — квадрат, $AMDNCBKL$ — правильний восьмикутник (рис. 89), точка O — центр цих багатокутників, $OA = R$. Із прямокутного трикутника AMF маємо $AM = \sqrt{AF^2 + FM^2}$. Ураховуючи, що $OA = R$, $AD = AO \cdot \sqrt{2} = R\sqrt{2}$.

$$FM = OM - OF = R - \frac{AD}{2} = R - \frac{R\sqrt{2}}{2}, \text{ маємо: } AM = \sqrt{\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{2} + R^2 + \frac{R^2}{2} - R^2\sqrt{2}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{2}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Фронтальна бесіда

- 1) У коло вписано правильний трикутник, і навколо цього самого кола описано правильний трикутник (рис. 90). Сторона описаного трикутника дорівнює a , а сторона вписаного — b . Визначте, які з наведених тверджень є правильними, а які — неправильними.

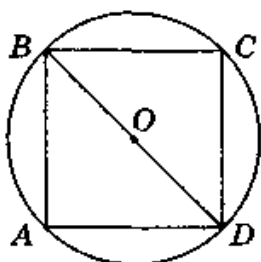


Рис. 88

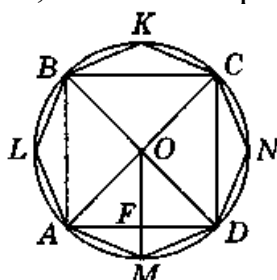


Рис. 89

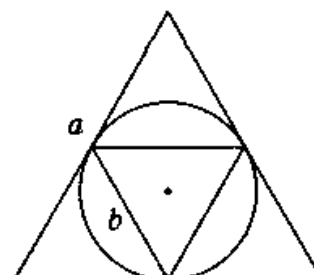


Рис. 90

а) $a = 3b$.

б) Точки перетину медіан обох трикутників збігаються.

в) Радіус кола дорівнює $\frac{b\sqrt{3}}{3}$.

г) Радіус кола дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

2) Навколо квадрата описано коло радіуса R , і в цей самий квадрат вписано коло радіуса r (рис. 91). Визначте, які з наведених тверджень є правильними, а які — неправильними.

а) $R = r\sqrt{3}$.

б) Центри описаного та вписаного кіл збігаються.

в) Сторона квадрата дорівнює $R\sqrt{2}$.

г) Сторона квадрата дорівнює $\frac{3r}{2}$.

Самостійна робота

Самостійну роботу можна провести за посібником [14], тест 6 «Правильні многокутники».

II. Первинне сприймання й усвідомлення нового матеріалу

Довжина кола

Щоб наочно уявити, що таке довжина кола, уявимо, що коло зроблено з тонкого дроту. Якщо таке коло розрізати в деякій точці A і розпрямити коло, то одержимо відрізок AA_1 , довжина якого і є довжиною кола (рис. 92).

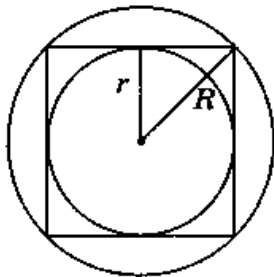


Рис. 91

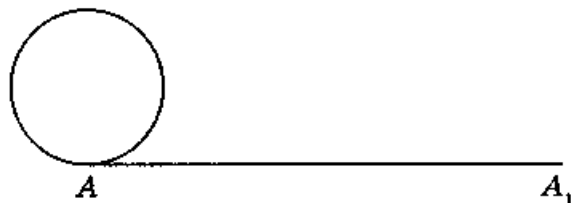


Рис. 92

Периметр будь-якого правильного вписаного в коло многокутника є наближеним значенням довжини кола. Чим більше число сторін такого многокутника, тим точніше це наближення, оскільки многокутник при збільшенні числа сторін все ближче і ближче «прилягає» до кола.

Теорема. Відношення довжини кола до його діаметра одне й те саме для кожного кола.

Доведення

Нехай маємо два довільних кола (рис. 93), радіуси яких дорівнюють R_1 і R_2 , а довжини кіл — C_1 і C_2 . У кожне з цих кіл впишемо правильні n -кутники з однаковим числом сторін, довжини яких дорівнюють a_n і a'_n , тоді їх периметри P_n і P'_n відповідно дорівнюватимуть:

$$P_n = na_n = n \cdot 2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad P'_n = na'_n = n \cdot 2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Тоді $\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R_1}{2R_2}$.

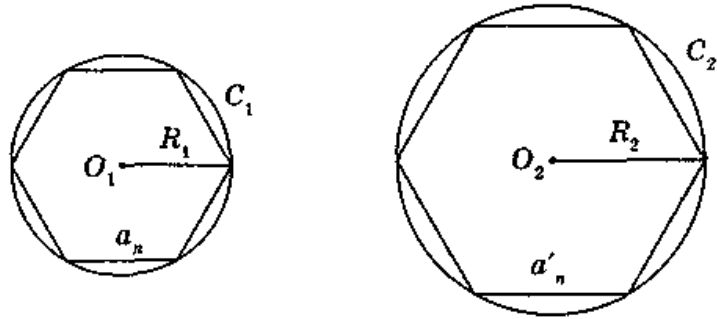


Рис. 93

Якщо значення n необмежено збільшувати, то периметри P_n і P'_n прямуватимуть до довжин кіл C_1 і C_2 , а відношення периметрів – до відношення $\frac{C_1}{C_2}$. Отже, $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$, або $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$, що і треба було довести.

Відношення довжини кола C до його діаметра $2R$ прийнято позначати грецькою буквою π . Число π — ірраціональне число, його наближене значення $\pi \approx 3,1415926$.

Отже, $\frac{C}{2R} = \pi$, звідки $C = 2\pi R$.

$C = 2\pi R$ — формула довжини кола.

Виконання вправ

1. Знайдіть довжину кола радіуса 5 см.
2. Знайдіть довжину кола діаметра 5 см.
3. Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює 16π см.
4. Знайдіть діаметр кола, довжина якого дорівнює 5π см.

Знаходження довжини дуги кола

Знайдемо довжину дуги кола, яка відповідає центральному куту n° . Оскільки розгорнутому куту відповідає довжина півкола πR (рис. 94), то куту 1° відповідає дуга довжиною $\frac{\pi R}{180}$, а куту n° — дуга

довжиною $l = \frac{\pi R n}{180}$.

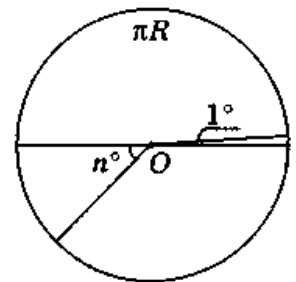


Рис. 94

Виконання вправ

1. Знайдіть довжину дуги кола радіуса 1 см, яка відповідає центральному куту, що становить:
 - а) 30° ;
 - б) 270° .

Розв'язання

$$\text{а) } l_1 = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 30}{180} = \frac{\pi}{6} \approx \frac{3,14}{6} \approx 0,52 \text{ (см);}$$

$$\text{б) } l_2 = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 270}{180} = \frac{3\pi}{2} \approx \frac{3 \cdot 3,14}{2} \approx 4,71 \text{ (см);}$$

Відповідь. 0,52 см; 4,71 см.

2. Скільки градусів містить центральний кут, якщо відповідна йому дуга становить:

- а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{2}{3}$ кола?

Розв'язання

$$\frac{1}{3} \cdot 360^\circ = 120^\circ; \quad \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ; \quad \frac{2}{3} \cdot 360^\circ = 240^\circ.$$

Відповідь. $120^\circ, 72^\circ, 240^\circ$.

3. За даним радіусом $R = 1$ м знайдіть довжину дуги, яка відповідає центральному куту, що становить:

- а) 45° ; б) 120° ; в) $60^\circ 30'$; г) $150^\circ 36'$.

Розв'язання

$$\text{а) } l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 45}{180} = \frac{\pi}{4} \approx 0,79 \text{ (м);}$$

$$\text{б) } l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 120}{180} = \frac{2\pi}{3} \approx 2,09 \text{ (м);}$$

$$\text{в) } l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 60,5}{180} = \frac{\pi \cdot 60,5}{180} \approx 1,05 \text{ (м);}$$

$$\text{г) } l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 150,6}{180} = \frac{\pi \cdot 150,6}{180} \approx 2,63 \text{ (м).}$$

Відповідь. $\approx 0,79$ м; $\approx 2,09$ м; $\approx 1,05$ м; $\approx 2,63$ м.

III. Закріплення й осмислення нового матеріалу

Розв'язування задач

- Довжина кола, описаного навколо квадрата, дорівнює 6π см. Знайдіть сторону цього квадрата. (*Відповідь.* $3\sqrt{2}$ см.)
- Сторона правильного трикутника дорівнює a . Знайдіть довжину кола, що є:
 - вписаним у цей трикутник;
 - описаним навколо цього трикутника.

(*Відповідь,* а) $\frac{\pi a \sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{2\pi a \sqrt{3}}{3}$.)

- Знайдіть радіус кола, дуга якого має довжину $15,7$ см і відповідає центральному куту, що становить 24° . (*Відповідь.* $\approx 37,5$ см.)
- Довжини основ і бічної сторони рівнобічної трапеції відповідно дорівнюють 9 см, 25 см і 17 см. Знайдіть довжину кола, вписаного в трапецію. (*Відповідь.* 15π см.)
- Довжина відрізка AB дорівнює a . На ньому позначено точки C_1, C_2, \dots, C_n і побудовано півкола (рис. 95), які мають діаметри $AC_1, C_1C_2, \dots, C_nB$. Знайдіть довжину побудованої кривої з кінцями в точках A і B . (*Відповідь.* $\frac{\pi a}{2}$.)
- Знайдіть відношення периметра правильного восьмикутника до діаметра і порівняйте його з наближеним значенням π .

Розв'язання

Нехай AB — сторона восьмикутника (рис. 96), тоді за теоремою косинусів із трикутника AOB маємо: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB$, де $OA =$

$$= OB = R, \angle AOB = 360^\circ : 8 = 45^\circ. \text{ Тоді } AB^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2R^2 - R^2\sqrt{2},$$

$$AB = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Периметр восьмикутника $P_8 = 8AB = 8R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, діаметр кола $2R$.

Отже, $P_8 : 2R = 8R\sqrt{2-\sqrt{2}} : 2R = 4\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 3,06$, а $\pi \approx 3,14$.

Відповідь. $3,06 < 3,14$.

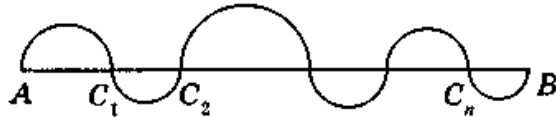


Рис. 95

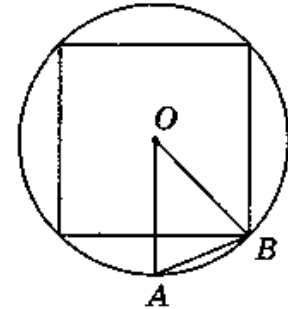


Рис. 96

7. Шків діаметра 1,4 м здійснює 80 обертів за хвилину. Знайдіть швидкість точки на ободі шківа.

Розв'язання

Довжина шківа: $C = 2\pi R = \pi \cdot 1,4 = 4,396$ (м). Шлях, пройдений точкою за хвилину: $S = C \cdot 80 = 4,396 \cdot 80 = 351,68$ (м).

Швидкість точки на ободі шківа:

$$V = \frac{S}{t} = \frac{351,68 \text{ м}}{1 \text{ хв}} = 351,68 \left(\frac{\text{м}}{\text{хв}} \right).$$

Відповідь. $351,68 \frac{\text{м}}{\text{хв}}$.

8. Відстань між якими двома точками на поверхні Землі дорівнює 1 км? Радіус Землі дорівнює 6370 км. Який кут утворюють радіуси Землі, проведені до двох даних точок?

Розв'язання

Нехай $OA = OB = 6370$ км, $l_{AB} = 1$ км (рис. 97). Оскільки $l = \frac{\pi R n}{180}$, то маємо

$$1 = \frac{\pi \cdot 6370 \cdot n}{180}; \quad 180 = 6370\pi n, \text{ звідси } n = \frac{180}{6370\pi} \approx 0,009.$$

Отже, шуканий кут дорівнює $n^\circ = 0,009^\circ = 0,009 \cdot 60' = 0,54' = 0,54 \cdot 60'' \approx 32''$.

Відповідь. $\approx 32''$.

9. За даною хордою a знайдіть довжину її дуги, якщо градусна міра дуги дорівнює 120° .

Розв'язання

Нехай $AB = a$, $\angle AOB = 120^\circ$ (рис. 98), $OA = OB = R$. За теоремою косинусів маємо: $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \angle AOB$; $a^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 120^\circ$; $a^2 = 2R^2 + R^2$; $a^2 = 3R^2$; $R^2 = \frac{a^2}{3}$; $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Тоді

$$l_{AB} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot 120}{180} = \frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}.$$

Відповідь. $\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}.$

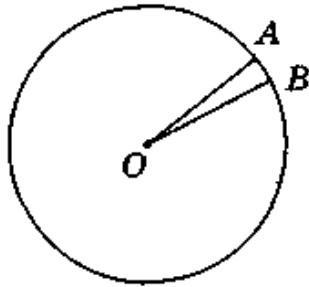


Рис. 97

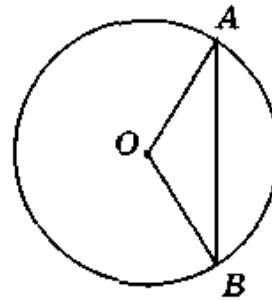


Рис. 98

10. За довжиною дуги l знайдіть її хорду, якщо дуга становить 120° .

Розв'язання

Оскільки $l = \frac{\pi R n}{180}$, то $R = \frac{180l}{\pi n} = \frac{180l}{\pi \cdot 120} = \frac{3l}{2\pi}$. За теоремою косинусів (рис.

98): $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \angle AOB = R^2 + R^2 + R^2 = 3R^2 = 3 \left(\frac{3l}{2\pi} \right)^2$.

Звідси $AB = \frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}$.

Відповідь. $\frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}$.

IV. Самостійна робота

Самостійну роботу навчального характеру можна провести за посібником [14], тест 7 «Довжина кола. Довжина дуги кола».

V. Домашнє завдання

- Вивчити формули довжини кола і довжини дуги кола.
- Розв'язати задачі.
 - Обчисліть довжину кола, якщо радіус дорівнює: а) 10 м; б) 15 м.
 - Знайдіть довжину дуги кола радіуса 1 см, яка відповідає центральному куту, що становить:
 - 45° ; б) 120° .
 - Знайдіть градусну міру центрального кута, якщо відповідна йому дуга становить:
 - $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{3}{4}$.
 - За даним колом радіуса $R = 1$ м знайдіть довжину дуги, яка відповідає центральному куту, що становить:
 - 30° ; б) $45^\circ 45'$.

VI. Підбиття підсумків уроку

Завдання класу

1. Чому дорівнює відношення довжини кола до діаметра?
2. Запишіть формули для знаходження:
 - а) довжини кола;
 - б) довжини дуги кола, що відповідає куту n° .